

# Illustrations et compléments :

## Application de la transformation de Concordia aux équations des actionneurs synchrones

### 1. Equations des actionneurs synchrones

Il est établi à la section 5.2.2 du [livre](#) que les équations des machines synchrones à aimants permanents utilisées en actionneurs peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\mathbf{U} = R \cdot \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{\Psi}}{dt}, \quad (1)$$

où

- $\mathbf{U} = (u_a, u_b, u_c)^t$  est le vecteur des tensions appliquées aux bornes des enroulements de la machine
- $\mathbf{I} = (i_a, i_b, i_c)^t$  est le vecteur des courants qui y circulent
- $\psi = (\psi_a, \psi_b, \psi_c)^t$  est celui des flux induits dans celles-ci.

Dans l'hypothèse où l'état magnétique de la machine est peu influencé par les courants qui circulent dans son stator, c'est-à-dire qu'on peut linéariser ses équations autour du point de fonctionnement magnétique fixé par les aimants du rotor, on a :

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}_0 + (\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_2)\mathbf{I} \quad (2)$$

avec

- $\mathbf{\Psi}_0(\theta_{em}) = \psi_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_{em}) \\ \cos(\theta_{em} - 2\pi/3) \\ \cos(\theta_{em} - 4\pi/3) \end{pmatrix},$

vecteur des flux induits en l'absence de courants (dus aux aimants permanents) supposés sinusoïdaux (hypothèse du premier harmonique) et tels que pour  $\theta_{em} = 0$ , l'axe magnétique du rotor coïncide avec celui de l'enroulement  $a$  ;

- $\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} L_0 & M_0 & M_0 \\ M_0 & L_0 & M_0 \\ M_0 & M_0 & L_0 \end{pmatrix},$

matrice des valeurs moyennes des inductances propres et mutuelles des enroulements du stator

- $\mathbf{L}_2 = L_2 \begin{pmatrix} \cos(2\theta_{em}) & \cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) & \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3) \\ \cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) & \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3) & \cos(2\theta_{em}) \\ \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3) & \cos(2\theta_{em}) & \cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) \end{pmatrix},$

matrice des variations éventuelles (supposées sinusoïdales) de ces inductances autour de leurs valeurs moyennes. Pour une machine à aimants montés en surface  $L_2 = 0$ .

Si le couple de détente peut être négligé, le couple électromagnétique développé s'écrit enfin :

$$C = \mathbf{I}^t \cdot \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta_m} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}^t \cdot \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \theta_m} \cdot \mathbf{I}$$

ou encore puisque  $\theta_{em} = p\theta_m$

$$C = p \cdot \mathbf{I}^t \cdot \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta_{em}} + \frac{1}{2} \cdot p \cdot \mathbf{I}^t \cdot \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \theta_{em}} \cdot \mathbf{I} \quad (3)$$

## 2. Analyse de la matrice $\mathbf{L}_0$

Le comportement électrique de l'actionneur synchrone est directement lié aux propriétés des deux matrices  $\mathbf{L}_0$  et  $\mathbf{L}_2$  et du vecteur  $\Psi_0$ .

La matrice  $\mathbf{L}_0$  a deux valeurs propres :

- une valeur propre simple ( $L_0 + 2M_0$ ) associée à l'espace propre d'équation  $x_a = x_b = x_c$  ;
- une valeur propre double ( $L_0 - M_0$ ) associée à l'espace propre d'équation  $x_a + x_b + x_c = 0$  ;

### DÉMONSTRATION

- Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{L}_0$  sont solutions de l'équation :

$$D = \det(\mathbf{L}_0 - \lambda \mathbf{I}_3) = 0, \text{ où } \mathbf{I}_3 \text{ est la matrice unitaire d'ordre 3}$$

En effet, si le déterminant de cette matrice est nul, cela signifie qu'il y a une infinité de vecteurs  $\mathbf{X}$  (constituant un espace propre) pour lesquels on peut écrire  $\mathbf{L}_0 \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$ , ce qui constitue la définition même d'une valeur propre.

Ce déterminant est nul si et seulement si :

$$\begin{aligned} D = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} L_0 - \lambda & M_0 & M_0 \\ M_0 & L_0 - \lambda & M_0 \\ M_0 & M_0 & L_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (L_0 - \lambda)[(L_0 - \lambda)^2 - M_0^2] - M_0[M_0(L_0 - \lambda) - M_0^2] + M_0[M_0^2 - M_0(L_0 - \lambda)] = 0 \\ &\Leftrightarrow (L_0 - \lambda)(L_0 - M_0 - \lambda)(L_0 + M_0 - \lambda) - 2M_0^2(L_0 - M_0 - \lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow (L_0 - M_0 - \lambda)[(L_0 - \lambda)(L_0 + M_0 - \lambda) - 2M_0^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow (L_0 - M_0 - \lambda)[\lambda^2 - (2L_0 + M_0)\lambda + L_0^2 + L_0M_0 - 2M_0^2] = 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation  $D = 0$  sont donc  $\lambda_1 = L_0 - M_0$  et les solutions de l'équation  $\lambda^2 + (2L_0 + M_0)\lambda + L_0^2 + L_0M_0 - 2M_0^2 = 0$ . Le déterminant  $\Delta$  de cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (2L_0 + M_0)^2 - 4(L_0^2 + L_0M_0 - 2M_0^2) \\ &= 4L_0^2 + 4L_0M_0 + M_0^2 - 4L_0^2 - 4L_0M_0 + 8M_0^2 \\ &= 9M_0^2 = (3M_0)^2 \end{aligned}$$

Ses racines s'écrivent donc :

$$\frac{2L_0 + M_0 - 3M_0}{2} = L_0 - M_0 = \lambda_1$$

$$\frac{2L_0 + M_0 + 3M_0}{2} = L_0 + 2M_0 = \lambda_2$$

qui sont donc les deux valeurs propres de  $L_0$ .

- L'espace propre  $\Sigma_1$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$  est défini par :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \in \Sigma_1 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} L_0 & M_0 & M_0 \\ M_0 & L_0 & M_0 \\ M_0 & M_0 & L_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = (L_0 - M_0) \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_0x_a + M_0x_b + M_0x_c = L_0x_a - M_0x_a \\ M_0x_a + L_0x_b + M_0x_c = L_0x_b - M_0x_b \\ M_0x_a + M_0x_b + L_0x_c = L_0x_c - M_0x_c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M_0(x_a + x_b + x_c) = 0 \\ M_0(x_a + x_b + x_c) = 0 \\ M_0(x_a + x_b + x_c) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un plan vectoriel d'équation  $x_a + x_b + x_c = 0$ .

- L'espace propre  $\Sigma_2$  associé à la valeur propre  $\lambda_2$  est défini par :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \in \Sigma_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} L_0 & M_0 & M_0 \\ M_0 & L_0 & M_0 \\ M_0 & M_0 & L_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = (L_0 + 2M_0) \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_0x_a + M_0x_b + M_0x_c = L_0x_a + 2M_0x_a \\ M_0x_a + L_0x_b + M_0x_c = L_0x_b + 2M_0x_b \\ M_0x_a + M_0x_b + L_0x_c = L_0x_c + 2M_0x_c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} M_0(x_a + x_b + x_c) = 3M_0x_a \\ M_0(x_a + x_b + x_c) = 3M_0x_b \\ M_0(x_a + x_b + x_c) = 3M_0x_c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_a = x_b = x_c \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une droite vectorielle d'équation  $x_a = x_b = x_c$ .

Une base de l'espace propre associée à la valeur propre  $(L_0 + 2M_0)$  est par exemple le vecteur unitaire

$$\mathbf{T}_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Une base de l'espace propre associée à la valeur propre  $(L_0 - M_0)$  est par exemple constituée des deux vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux ( $\mathbf{x}_1^t \cdot \mathbf{x}_2 = 0$ ) :

$$\mathbf{x}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

On note que ces deux vecteurs  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont par ailleurs orthogonaux au vecteur  $\mathbf{T}_{31}$  (on a  $\mathbf{x}_1^t \cdot \mathbf{T}_{31} = 0$ ,  $\mathbf{x}_2^t \cdot \mathbf{T}_{31} = 0$ ). Les deux espaces propres sont en effet orthogonaux entre eux.

Si on définit la matrice  $\mathbf{T}_{32}$  par :

$$\mathbf{T}_{31} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

on peut donc écrire :

$$\mathbf{T}_{31}^t \mathbf{T}_{32} = (0, 0) \Leftrightarrow \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{T}_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{31}^t \mathbf{T}_{31} = 1, \quad \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{T}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 \quad (6)$$

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{T}_{31} = (L_0 + 2M_0) \mathbf{T}_{31} \quad (7)$$

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{T}_{32} = (L_0 - M_0) \mathbf{T}_{32} \quad (8)$$

### 3. Factorisation du vecteur $\Psi_0$ et de la matrice $\mathbf{L}_2$

On remarque que

$$\mathbf{T}_{31}^t \Psi_0 = 0 \quad (9)$$

Le vecteur  $\Psi_0$  est orthogonal au vecteur  $\mathbf{T}_{31}$ . Il appartient donc au plan propre de  $\mathbf{L}_0$  associé à la valeur propre  $(L_0 - M_0)$ .

On remarque également que la matrice  $\mathbf{T}_{32}$  peut encore s'écrire :

$$\mathbf{T}_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos 2\pi/3 & \sin 2\pi/3 \\ \cos 4\pi/3 & \sin 4\pi/3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice se prête donc bien à la factorisation des matrices représentatives des systèmes triphasés. On montre en particulier que :

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_0 \mathbf{T}_{32} \begin{pmatrix} \cos \theta_{em} \\ \sin \theta_{em} \end{pmatrix} \quad (10)$$

#### DÉMONSTRATION

On calcule :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{32}^t \Psi_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_0 \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{em}) \\ \cos(\theta_{em} - 2\pi/3) \\ \cos(\theta_{em} - 4\pi/3) \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_{em} - \frac{1}{2} [\cos(\theta_{em} - 2\pi/3) + \cos(\theta_{em} - 4\pi/3)] \\ \sqrt{3}/2 [\cos(\theta_{em} - 2\pi/3) - \cos(\theta_{em} - 4\pi/3)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or :

- $\cos \theta_{em} + \cos(\theta_{em} - 2\pi/3) + \cos(\theta_{em} - 4\pi/3) = 0$
- $\cos(\theta_{em} - 4\pi/3) = \cos(\theta_{em} + 2\pi/3)$  et  $\forall a, \forall b \cos(a + b) - \cos(a - b) = 2 \sin a \sin b$

On a donc

$$\mathbf{T}_{32}^t \Psi_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_{em} + \frac{1}{2} \cos \theta_{em} \\ \sqrt{3} \sin \theta_{em} \sin \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

et donc finalement, comme  $\sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}/2$

$$\mathbf{T}_{32}^t \Psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_{em} \\ \sin \theta_{em} \end{pmatrix}$$

En prémultipliant cette expression par  $\mathbf{T}_{32}$  et compte tenu de (6), on obtient finalement :

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_0 \mathbf{T}_{32} \begin{pmatrix} \cos \theta_{em} \\ \sin \theta_{em} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \frac{3}{2} L_2 \mathbf{T}_{32} \begin{pmatrix} \cos 2\theta_{em} & \sin 2\theta_{em} \\ \sin 2\theta_{em} & -\cos 2\theta_{em} \end{pmatrix} \mathbf{T}_{32}^t \quad (11)$$

### DÉMONSTRATION

On calcule :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 \mathbf{T}_{32} &= L_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos 2\theta_{em} & \cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) & \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3) \\ \cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) & \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3) & \cos(\theta_{em}) \\ \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3) & \cos(\theta_{em}) & \cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\ &= L_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} h_1(2\theta_{em}) & h_2(2\theta_{em}) \\ h_1(2\theta_{em} - 2\pi/3) & h_2(2\theta_{em} - 2\pi/3) \\ h_1(2\theta_{em} - 4\pi/3) & h_2(2\theta_{em} - 4\pi/3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où les fonctions  $h_1(2\theta_{em})$  et  $h_2(2\theta_{em})$  sont définies par :

- $$\begin{aligned} h_1(2\theta_{em}) &= \cos(2\theta_{em}) - \frac{1}{2} [\cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) + \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3)] \\ &= \cos(2\theta_{em}) + \frac{1}{2} \cos(2\theta_{em}) \\ &= \frac{3}{2} \cos(2\theta_{em}) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} h_2(2\theta_{em}) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) - \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3)] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) - \cos(2\theta_{em} + 2\pi/3)] \end{aligned}$$

Or,  $\forall a, \forall b \cos(a + b) - \cos(a - b) = 2 \sin a \sin b$ . D'où :

$$\begin{aligned} h_2(2\theta_{em}) &= \sqrt{3} \sin(2\theta_{em}) \sin(2\pi/3) \\ &= \frac{3}{2} \sin(2\theta_{em}) \end{aligned}$$

On peut donc finalement écrire :

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{T}_{32} = L_2 \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} \cos(2\theta_{em}) & \sin(2\theta_{em}) \\ \cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) & \sin(2\theta_{em} - 2\pi/3) \\ \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3) & \sin(2\theta_{em} - 4\pi/3) \end{pmatrix}$$

En pré-multipliant cette expression par  $\mathbf{T}_{32}^t$  on calcule ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{L}_2 \mathbf{T}_{32} &= L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\theta_{em}) & \sin(2\theta_{em}) \\ \cos(2\theta_{em} - 2\pi/3) & \sin(2\theta_{em} - 2\pi/3) \\ \cos(2\theta_{em} - 4\pi/3) & \sin(2\theta_{em} - 4\pi/3) \end{pmatrix} \\ &= L_2 \begin{pmatrix} h_1(2\theta_{em}) & h_3(2\theta_{em}) \\ h_2(2\theta_{em}) & h_4(2\theta_{em}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où les fonctions  $h_3(2\theta_{em})$  et  $h_4(2\theta_{em})$  sont définies par :

- $$\begin{aligned} h_3(2\theta_{em}) &= \sin(2\theta_{em}) - \frac{1}{2}[\sin(2\theta_{em} - 2\pi/3) + \sin(2\theta_{em} - 4\pi/3)] \\ &= \sin(2\theta_{em}) + \frac{1}{2}\sin(2\theta_{em}) \\ &= \frac{3}{2}\sin(2\theta_{em}) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} h_4(2\theta_{em}) &= \frac{\sqrt{3}}{2}[\sin(2\theta_{em} - 2\pi/3) - \sin(2\theta_{em} - 4\pi/3)] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}[\sin(2\theta_{em} - 2\pi/3) - \sin(2\theta_{em} + 2\pi/3)] \end{aligned}$$

Or,  $\forall a, \forall b \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b$ . D'où :

- $$\begin{aligned} h_4(2\theta_{em}) &= -\sqrt{3}\cos(2\theta_{em})\sin(2\pi/3) \\ &= -\frac{3}{2}\cos(2\theta_{em}) \end{aligned}$$

On peut donc finalement écrire :

$$\mathbf{T}_{32}^t \mathbf{L}_2 \mathbf{T}_{32} = \frac{3}{2} L_2 \begin{pmatrix} \cos(2\theta_{em}) & \sin(2\theta_{em}) \\ \sin(2\theta_{em}) & -\cos(2\theta_{em}) \end{pmatrix}$$

ou de façon équivalente, en multipliant par  $\mathbf{T}_{32}$  et en post-multipliant par  $\mathbf{T}_{32}^t$  et compte tenu de (6) :

$$\mathbf{L}_2 = \frac{3}{2} L_2 \mathbf{T}_{32} \begin{pmatrix} \cos 2\theta_{em} & \sin 2\theta_{em} \\ \sin 2\theta_{em} & -\cos 2\theta_{em} \end{pmatrix} \mathbf{T}_{32}^t$$

**Remarque :** de (11) et de (6), on en déduit que :

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{T}_{31} = \mathbf{0} \tag{12}$$

## 4. Transformation de Concordia

Les composantes homopolaires  $x_h$  et diphasées  $x_\alpha$  et  $x_\beta$  d'un vecteur  $\mathbf{X} = (x_a, x_b, x_c)^t$  sont définies par (cf. § 5.2.3.1 du livre) :

$$x_h = \mathbf{T}_{31}^t X \quad (13)$$

$$\mathbf{X}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{32}^t X \quad (14)$$

Réciproquement on a :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x_h \\ x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{T}$  est une matrice  $3 \times 3$  dont la première colonne est le vecteur  $\mathbf{T}_{31}$  et les deux autres les colonnes du vecteur  $\mathbf{T}_{32}$ .

On peut donc encore écrire :

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}_{31} x_h + \mathbf{T}_{32} \mathbf{X}_{\alpha\beta} \quad (15)$$

## 5. Représentation des grandeurs triphasées dans le repère de Concordia

Le fait :

- de représenter une grandeur relative à trois enroulements sous la forme d'un vecteur ayant comme composantes, dans une base orthonormée d'un espace à trois dimensions de référence, l'amplitude de cette grandeur dans chacun des enroulements ;
- puis d'appliquer à ce vecteur représentatif la transformation de Concordia revient à représenter dans le plan " $\alpha\beta$ " :

- la composante  $x_a$  relative à la phase " $a$ " sous la forme d'un vecteur

$$\mathbf{x}_{a,(\alpha\beta)} = \mathbf{T}_{32}^t \begin{pmatrix} x_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} x_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} x_a \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire un vecteur aligné avec l'axe " $\alpha$ " et d'amplitude  $\sqrt{\frac{2}{3}} x_a$

- la composante  $x_b$  relative à la phase " $b$ " sous la forme d'un vecteur

$$\mathbf{x}_{b,(\alpha\beta)} = \mathbf{T}_{32}^t \begin{pmatrix} 0 \\ x_b \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} x_b \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} x_b \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire un vecteur faisant un angle de  $2\pi/3$  avec l'axe " $\alpha$ " et d'amplitude  $\sqrt{\frac{2}{3}} x_b$

- la composante  $x_c$  relative à la phase " $c$ " sous la forme d'un vecteur

$$\mathbf{x}_{c,(\alpha\beta)} = \mathbf{T}_{32}^t \begin{pmatrix} 0 \\ x_c \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} x_c \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} x_c \begin{pmatrix} \cos 4\pi/3 \\ \sin 4\pi/3 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire un vecteur faisant un angle de  $4\pi/3$  avec l'axe " $\alpha$ " et d'amplitude  $\sqrt{\frac{2}{3}} x_c$

Ces trois vecteurs sont donc décalés les uns par rapport aux autres d'un angle de  $2\pi/3$ , tout comme le sont dans une machine triphasée les axes magnétiques des trois enroulements considérés.

Figure 1 = Applet 1.

Les composantes  $\alpha$  et  $\beta$  du vecteur représentatif de la grandeur sont deux vecteurs décalés l'un par rapport à l'autre d'un angle de  $\pi/2$ , tout comme le sont dans une machine diphasée les axes magnétiques de ses deux enroulements.

Figure 2 = Applet 2.

En particulier si le vecteur  $\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$  représente un système triphasé équilibré :

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \cos(\xi) \\ \cos(\xi - 2\pi/3) \\ \cos(\xi - 4\pi/3) \end{pmatrix}$$

sa représentation dans le repère " $\alpha\beta$ " sera un vecteur tournant, comme l'est, par exemple, le vecteur représentatif du champ total d'entrefer résultant de l'alimentation d'enroulements triphasés (ou diphasés) par des courants triphasés (ou diphasés) (voir illustration et complément : notion de champ tournant / représentation du champ total d'entrefer résultant).

Figure 3 = Applet 3.

## 6. Application de la transformation de Concordia à l'équation des flux

- En prémultipliant (2) par  $\mathbf{T}_{31}^t$ , on obtient :

$$\mathbf{T}_{31}^t \Psi = \psi_h = \mathbf{T}_{31}^t \Psi + \mathbf{T}_{31}^t \mathbf{L}_0 \mathbf{I} + \mathbf{T}_{31}^t \mathbf{L}_2 \mathbf{I}$$

avec :



- d'après (9),  $\mathbf{T}_{31}^t \Psi_0 = 0$
- d'après (7) et comme  $\mathbf{L}_0$  est symétrique,  $\mathbf{T}_{31}^t \mathbf{L}_0 = (L_0 + 2M_0)\mathbf{T}_{31}^t$
- d'après (12) et comme  $\mathbf{L}_2$  est symétrique,  $\mathbf{T}_{31}^t \mathbf{L}_2 = \mathbf{0}$

D'où :

$$\psi_h = (L_0 + 2M_0)\mathbf{T}_{31}^t \mathbf{I}$$

et donc finalement d'après (13)

$$\psi_h = (L_0 + 2M_0)i_h \quad (16)$$

- De même, en prémultipliant (2) par  $\mathbf{T}_{32}^t$ , on calcule :

$$\mathbf{T}_{32}^t \Psi = \Psi_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_{32}^t \Psi_0 + \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{L}_0 \mathbf{I} + \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{L}_2 \mathbf{I}$$

avec :

- d'après (10) et (6),  $\mathbf{T}_{32}^t \Psi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_{em} \\ \sin \theta_{em} \end{pmatrix}$

- d'après (8) et comme  $\mathbf{L}_0$  est symétrique,  $\mathbf{T}_{32}^t \mathbf{L}_0 = (L_0 - M_0)\mathbf{T}_{32}^t$

- d'après (11) et (6)  $\mathbf{T}_{32}^t \mathbf{L}_2 = \frac{3}{2}L_2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta_{em} & \sin 2\theta_{em} \\ \sin 2\theta_{em} & -\cos 2\theta_{em} \end{pmatrix} \mathbf{T}_{32}^t$

D'où :

$$\Psi_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_{em} \\ \sin \theta_{em} \end{pmatrix} + (L_0 - M_0)\mathbf{T}_{32}^t \mathbf{I} + \frac{3}{2}L_2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta_{em} & \sin 2\theta_{em} \\ \sin 2\theta_{em} & -\cos 2\theta_{em} \end{pmatrix} \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{I}$$

et donc finalement d'après (14)

$$\Psi_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_{em} \\ \sin \theta_{em} \end{pmatrix} + (L_0 - M_0)\mathbf{I}_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}L_2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta_{em} & \sin 2\theta_{em} \\ \sin 2\theta_{em} & -\cos 2\theta_{em} \end{pmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta} \quad (17)$$

On remarque que :

- la composante homopolaire  $\psi_h$  des flux dans les phases du stator ne dépend que de la composante  $i_h$  des courants statoriques ;
- les composantes diphasées  $\psi_\alpha$  et  $\psi_\beta$  de ces flux ne sont dues qu'aux composantes  $I_\alpha$  et  $I_\beta$  des courants.

## 7. Application de la transformation de Concordia à l'équation des tensions

- Dans la mesure où la matrice  $\mathbf{T}_{31}$  est indépendante du temps, on peut en prémultipliant (1) par  $\mathbf{T}_{31}^t$ , écrire :

$$\mathbf{T}_{31}^t \mathbf{U} = u_h = R\mathbf{T}_{31}^t \mathbf{I} + \mathbf{T}_{31}^t \frac{d\Psi}{dt} = Ri_h + \frac{d(\mathbf{T}_{31}^t \Psi)}{dt} = Ri_h + \frac{d\psi_h}{dt}$$

et donc d'après (16) :

$$u_h = Ri_h + (L_0 + 2M_0)\frac{di_h}{dt} \quad (18)$$

Le système homopolaire est donc assimilable à un simple circuit R-L.

- De même, en prémultipliant (1) par  $\mathbf{T}_{32}^t$ , on écrit :

$$\mathbf{T}_{32}^t \mathbf{U} = \mathbf{U}_{\alpha\beta} = R\mathbf{T}_{32}^t \mathbf{I} + \mathbf{T}_{32}^t \frac{d\Psi}{dt} = R\mathbf{I}_{\alpha\beta} + \frac{d(\mathbf{T}_{32}^t \Psi)}{dt}$$

d'où

$$\mathbf{U}_{\alpha\beta} = R\mathbf{I}_{\alpha\beta} + \frac{d\Psi_{\alpha\beta}}{dt} \quad (19)$$

## 8. Application de la transformation de Concordia à l'équation du couple

On a vu (cf. § 6) que seules les composantes diphasées ( $\alpha\beta$ ) du flux induit dans les phases du stator dépendent de la position du rotor. Dès lors, seul ce système diphasé intervient dans l'équation du couple.

On calcule :

$$C = \sqrt{\frac{3}{2}}p\psi_0\mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \begin{pmatrix} -\sin\theta_{em} \\ \cos\theta_{em} \end{pmatrix} + \frac{3}{2}pL_2\mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \begin{pmatrix} -\sin(2\theta_{em}) & \cos(2\theta_{em}) \\ \cos(2\theta_{em}) & \sin(2\theta_{em}) \end{pmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta} \quad (20)$$

### DÉMONSTRATION

L'expression du couple est donnée par (6) :

$$C = p \cdot \mathbf{I}^t \cdot \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta_{em}} + \frac{1}{2} \cdot p \cdot \mathbf{I}^t \cdot \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial \theta_{em}} \mathbf{I}$$

En remplaçant dans cette expression  $\Psi_0$  et  $\mathbf{L}_2$  par leurs formes factorisées (10) et (11), on obtient :

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{3}{2}}p\psi_0\mathbf{I}^t\mathbf{T}_{32} \frac{\partial}{\partial \theta_{em}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{em}) \\ \sin(\theta_{em}) \end{pmatrix} + \frac{3}{4}pL_2\mathbf{I}^t\mathbf{T}_{32} \frac{\partial}{\partial \theta_{em}} \begin{pmatrix} \cos(2\theta_{em}) & \sin(2\theta_{em}) \\ \sin(2\theta_{em}) & -\cos(2\theta_{em}) \end{pmatrix} \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{I} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}p\psi_0(\mathbf{T}_{32}^t \mathbf{I})^t \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{em}) \\ \cos(\theta_{em}) \end{pmatrix} + \frac{3}{2}pL_2(\mathbf{T}_{32}^t \mathbf{I})^t \begin{pmatrix} -\sin(2\theta_{em}) & \cos(2\theta_{em}) \\ \cos(2\theta_{em}) & \sin(2\theta_{em}) \end{pmatrix} \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{I} \end{aligned}$$

et donc d'après (17) :

$$C = \sqrt{\frac{3}{2}}p\psi_0\mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{em}) \\ \cos(\theta_{em}) \end{pmatrix} + \frac{3}{2}pL_2\mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \begin{pmatrix} -\sin(2\theta_{em}) & \cos(2\theta_{em}) \\ \cos(2\theta_{em}) & \sin(2\theta_{em}) \end{pmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta}$$

Par ailleurs, les pertes Joule dans les enroulements peuvent être estimées à :

$$P_J = R(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) = R(i_h^2 + i_\alpha^2 + i_\beta^2) \quad (21)$$

### DÉMONSTRATION

Les pertes Joule dans les enroulements de la machine s'écrivent :

$$P_J = R(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) = R\mathbf{I}^t \mathbf{I}$$

soit encore d'après (15) :

$$P_J = R(i_h \mathbf{T}_{31}^t + \mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \mathbf{T}_{32}^t)(\mathbf{T}_{31} i_h + \mathbf{T}_{32} \mathbf{I}_{\alpha\beta})$$

$$= R[i_h \mathbf{T}_{31}^t \mathbf{T}_{31} i_h + i_h \mathbf{T}_{31}^t \mathbf{T}_{32} \mathbf{I}_{\alpha\beta} + \mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{T}_{31} i_h + \mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \mathbf{T}_{32}^t \mathbf{T}_{32} \mathbf{I}_{\alpha\beta}]$$

D'après (6) cette expression peut encore se réduire à :

$$P_J = R(i_h^2 + \mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \mathbf{I}_{\alpha\beta}) = R(i_h^2 + i_\alpha^2 + i_\beta^2)$$

Dans la mesure où le système homopolaire ne contribue pas à la génération du couple moteur, on a tout intérêt pour les minimiser à travailler à  $i_h = 0 \Leftrightarrow i_a + i_b + i_c = 0$ . Ceci peut être obtenu simplement en connectant la machine en étoile à neutre isolé.

**Remarque.**

La nullité du courant  $i_h$  pourrait également être obtenue d'après (18) en imposant en permanence  $u_h = 0 \Rightarrow u_a + u_b + u_c = 0$ , ce qui peut être obtenu simplement en connectant la machine en triangle.

Cependant, dans la mesure où la conception des actionneurs triphasés n'est pas toujours optimisée pour éliminer les composantes harmoniques de rang 3 du champ d'entrefer (voir laboratoire virtuel : Réalisation d'un enroulement assurant une répartition quasi sinusoïdale du champ d'entrefer) il peut subsister une composante homopolaire de flux non nulle :

$$\psi_h = \mathbf{T}_{31}^t \psi_{03} \begin{pmatrix} \cos 3\theta_{em} \\ \cos 3(\theta_{em} - 2\pi/3) \\ \cos 3(\theta_{em} - 4\pi/3) \end{pmatrix} = \sqrt{3} \psi_{03} \cos 3\theta_{em}$$

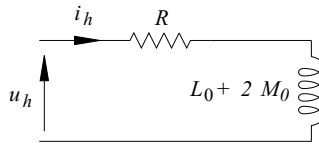
Le système homopolaire devient alors équivalent à une machine monophasée qui, si l'actionneur est connecté en triangle est court-circuitée. Quand la machine tourne, la puissance délivrée par cet alternateur monophasé et prélevée sur la puissance mécanique fournie par l'actionneur diphasé est alors directement dissipée sous forme de chaleur dans l'"enroulement homopolaire" (donc dans les enroulements statoriques). C'est pourquoi il est toujours préférable de connecter un actionneur synchrone en étoile.

## 9. Equations des actionneurs synchrones dans le repère de Concordia

La transformation de Concordia permet finalement de décomposer les équations d'un actionneur asynchrone en deux systèmes d'équations :

- un système homopolaire assimilable à un simple circuit R-L (figure 4) décrit par l'équation :

$$u_h = Ri_h + (L_o + 2M_0) \frac{di_h}{dt}$$



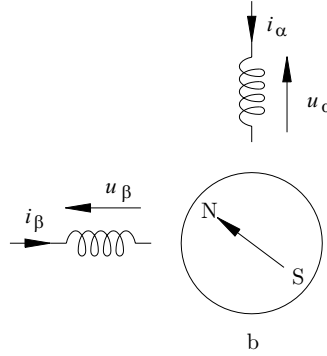
Il est à noter que, dans la mesure où, aux fuites près, l'inductance mutuelle  $M_0$  est égale à :  $-\frac{1}{2}L_0$  (voir § 3.1.2 et 3.5 du livre) ; la constante de temps de ce circuit homopolaire est très faible. Il est donc susceptible de présenter des temps de réponse en courant très rapide.

- un système diphasé assimilable à une machine synchrone diphasée (figure 5) décrite par les équations :

$$\Psi_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_0 \begin{pmatrix} \cos \theta_{em} \\ \sin \theta_{em} \end{pmatrix} + (L_0 - M_0) \mathbf{I}_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} L_2 \begin{pmatrix} \cos 2\theta_{em} & \sin 2\theta_{em} \\ \sin 2\theta_{em} & -\cos 2\theta_{em} \end{pmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta} \quad (22)$$

$$\mathbf{U}_{\alpha\beta} = R\mathbf{I}_{\alpha\beta} + \frac{d\Psi_{\alpha\beta}}{dt} \quad (23)$$

$$C = \sqrt{\frac{3}{2}}p\psi_0\mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \begin{pmatrix} -\sin\theta_{em} \\ \cos\theta_{em} \end{pmatrix} + \frac{3}{2}pL_2\mathbf{I}_{\alpha\beta}^t \begin{pmatrix} -\sin(2\theta_{em}) & \cos(2\theta_{em}) \\ \cos(2\theta_{em}) & \sin(2\theta_{em}) \end{pmatrix} \mathbf{I}_{\alpha\beta} \quad (24)$$



Cette machine dont les constantes de temps oscillent autour de  $L_0 - M_0$  (égales aux fuites près à  $\frac{3}{2}L_0$ ) (voir § 3.1.2 et 3.5 du livre), présente une dynamique en courant très différente de celle du circuit homopolaire.