

Laboratoire virtuel :  
**Réalisation d'un enroulement réparti assurant  
une répartition quasi sinusoïdale du champ  
dans l'entrefer**<sup>1</sup>

*Question 1*

*Calculer en tout point de l'entrefer le champ  $H$  créé par une spire située à la périphérie d'un entrefer lisse et parcourue par un courant  $I$ . On considérera dans cette étude que la perméabilité du fer est infinie, et on négligera les flux de fuite.*

*On choisira comme axe de référence pour repérer la position d'un point dans l'entrefer, l'axe magnétique de la bobine.*

**Aide**

Comme il est montré dans l'appendice A.2.1, les hypothèses fondamentales à poser pour ce calcul, sont que :

- l'entrefer peut être assimilé à un entrefer sans encoches à la périphérie duquel les conducteurs sont situés ;
- le fer a une perméabilité infinie de sorte que le champ  $H$  y est nul ;
- l'entrefer est mince, de sorte que les lignes de champ y sont purement radiales et que, le long d'une ligne de champ,  $B$  (et donc aussi  $H$ ) a une valeur constante ;
- le champ est hétéropolaire : il se dirige du rotor vers le stator sur une moitié de la périphérie, et dans le sens contraire sur l'autre moitié ;
- il n'y a pas d'effets de bord, ce qui revient à admettre que le champ d'entrefer a la même répartition dans tout plan de coupe perpendiculaire à l'axe de la machine.

Dans ces conditions, la valeur du champ en un point de l'entrefer ne dépend que de la coordonnée angulaire  $q$  du point. Il suffit d'étudier la répartition du champ dans un plan de coupe perpendiculaire à l'axe de la machine.

**Réponse**

Comme l'entrefer est mince, on peut admettre que le champ y est purement radial. Pour un courant  $I$  positif, le champ est positif (se dirige du rotor vers le stator pour  $-\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2}$  et négatif (se dirige du stator vers le rotor) pour  $\frac{\pi}{2} < q < \frac{3\pi}{2}$ .

---

<sup>1</sup>**Avertissement** : Il est possible que quelques erreurs subsistent dans ce document par rapport à la version définitive du site. Si tel était le cas, n'hésitez pas à le signaler aux auteurs du site.

$$H(\theta) = \begin{cases} \frac{I}{2e} & \text{pour } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{I}{2e} & \text{pour } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Figure 1. Animation.

### Démonstration

Pour calculer le champ  $H$  en un point  $M$  de l'entrefer de position angulaire  $q$ , il suffit d'appliquer le théorème d'Ampère à un contour  $G$ , traversant l'entrefer respectivement en  $q$  et  $p - q$ .

On a alors :

$$\oint_r \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \quad (1)$$

Comme on suppose la perméabilité du fer infinie, le champ  $H$  est nul dans le fer (on a en effet  $H = BIm$ ), les seules portions du contour  $G$  qui nous intéressent sont donc les traversées de l'entrefer.

Comme l'entrefer est mince, on peut admettre que le champ y est purement radial. Pour un courant  $I$  positif, le champ est positif (se dirige du rotor vers le stator) pour  $-\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2}$  et négatif (se dirige du stator vers le rotor) pour  $\frac{\pi}{2} < q < \frac{3\pi}{2}$ .

L'équation (1) devient alors :

$$H(\theta) \cdot e - H(\pi - \theta) \cdot e = I \quad (2)$$

De plus, par raison de symétrie, la valeur du champ  $H$  en  $q$  est égale à l'opposée de celle du champ  $H$  en  $p - q$ .

$$H(\theta) = -H(\pi - \theta) \quad (3)$$

On en déduit finalement :

$$H(\theta) = \begin{cases} \frac{I}{2e} & \text{pour } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{I}{2e} & \text{pour } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

### Question 2

Calculer les coefficients de Fourier des harmoniques d'espace de ce champ et tracer son spectre.

### Aide

Le développement en série de Fourier d'une fonction  $F(x)$  paire, périodique de période  $T$ , s'écrit :

$$F(x) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

avec :

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(x) dx$$

$$F_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx$$

La valeur absolue de  $F_n$  donne l'amplitude de l'harmonique de rang  $n$ .

### Réponse

Les coefficients de Fourier des harmoniques de rangs pairs sont nuls. Ces harmoniques n'existent pas.

Les coefficients de Fourier des harmoniques de rangs impairs sont égaux à

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2I}{(2k+1)\pi e}$$

Figure 2. Animation.

### Démonstration

On a vu précédemment que le champ  $H(q)$  créé par une spire parcourue par un courant  $I$  était une fonction paire de la variable  $q$ , de période  $2p$ . Dans ces conditions, l'harmonique de rang  $n$  de  $H$  s'écrit  $H_n \cos(n\theta)$ , avec :

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I}{2e} \cdot \cos(n\theta) \cdot d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{I}{2e} \cdot \cos(n\theta) \cdot d\theta \\ &= \frac{I}{2n\pi e} \left( [\sin(n\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - [\sin(n\theta)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right) \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

soit  $n$  est pair ( $n = 2k$ ) et alors :

$$H_{2k} = \frac{I}{2(2k)\pi e} (\underbrace{[\sin(k\pi)]}_{=0} + \underbrace{[\sin(k\pi)]}_{=0}) - (\underbrace{[\sin(3k\pi)]}_{=0} - \underbrace{[\sin(k\pi)]}_{=0}) = 0$$

**Les coefficients de Fourier des harmoniques de rangs pairs sont nuls. Ces harmoniques n'existent pas.**

Soit  $n$  est impair ( $n = 2k + 1$ ) et alors :

$$H_{2k+1} = \frac{I}{2(2k+1)\pi e} \left[ 3 \cdot \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3(2k+1)\pi}{2}\right) \right]$$

**Les coefficients de Fourier des harmoniques de rangs impairs sont égaux à :**

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2I}{(2k+1)\pi e}$$

On a :

$$H(\theta) = \frac{(2I)}{(\pi e)} \left[ \cos \theta - \frac{\cos 3\theta}{3} + \frac{\cos 5\theta}{5} - \frac{\cos 7\theta}{7} + \frac{\cos 9\theta}{9} - \dots \right]$$

### Question 3

*Effectuez le même calcul pour une bobine constituée de  $N$  spires en série et donc parcourues par le même courant  $I$ .*

### Réponse

On procède de la même façon que précédemment, tant pour le calcul du champ  $H$  que pour le calcul de ses harmoniques d'espace, en remplaçant simplement  $I$  par  $NI$ . On a donc :

$$H(\theta) = \begin{cases} \frac{NI}{2e} & \text{pour } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{NI}{2e} & \text{pour } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Le spectre de  $H$  ne contient aucun harmonique de rang pair. Ses harmoniques de rang impair ont des coefficients de Fourier égaux à :

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e}$$

### Vérification

On peut vérifier la pertinence des hypothèses posées pour le calcul théorique en comparant les résultats ainsi obtenus (figure 3) avec ceux donnés par une modélisation par éléments finis.

Figure 3. Résultat du calcul théorique.

Cette technique de calcul permet de résoudre numériquement les équations locales du champ dans la machine. Elle est basée sur une discrétisation de l'espace permettant l'intégration numérique des équations de Maxwell.

On considère la machine dont une coupe est représentée sur la figure 4. Les surfaces en bleu et en magenta correspondent respectivement aux tôles du stator et du rotor. Ces tôles sont constituées d'un matériau ferromagnétique dont la perméabilité relative est élevée tant que le champ n'a pas atteint le niveau de saturation. Les zones représentées en bleu turquoise correspondent à des zones ayant toutes d'un point de vue magnétique, les mêmes propriétés que celles l'air. Elles peuvent correspondre soit effectivement à de l'air (dans l'entrefer notamment), soit à des conducteurs en cuivre dans lesquels ne passerait aucun courant (cas des encoches du rotor et de la plupart des encoches du stator) ou encore de l'axe du rotor (que l'on a supposé ici en acier amagnétique). Enfin, les deux surfaces en rouge et en jaune correspondent aux deux encoches contenant des conducteurs parcourus par un courant non nul.

Figure 4. Coupe de la machine étudiée.

On ne considérera pas dans cette étude chacun de ces conducteurs, sa section et sa position exacte (que l'on serait d'ailleurs incapables de déterminer avec précision compte-tenu des aléas introduits par le procédé de bobinage) mais on assimilera plutôt ces deux encoches à des zones contenant un matériau dont les caractéristiques magnétiques sont celles de l'air et parcourues par une densité de courant  $j$  constante et égale à  $\frac{kNI}{S}$  où  $N$  est le nombre de spires de la bobine,  $I$  le courant qui y circule,  $S$  la surface de l'encoche et  $k$  le coefficient de remplissage, à savoir le rapport entre la surface total des conducteurs et celle de l'encoche ( $k = \frac{N\sigma_c}{S}$  si on désigne par  $\sigma_c$  la section d'un conducteur).

La surface d'étude a été divisée en environ 6000 éléments dont la forme doit être, pour avoir un bon maillage de l'espace, la plus proche possible de celle d'un triangle équilatéral. Le maillage est plus serré aux environs de l'entrefer (figure 5) et plus lâche ailleurs (comme par exemple au niveau de l'axe ou sur les parties extérieures du stator) pour limiter le nombre d'éléments. A ces éléments sont associés environ 12000 points (les noeuds) correspondant soit aux sommets des ces triangles, soit aux centres de leurs cotés. C'est en chacun de ces points qu'est calculé le potentiel vecteur  $\vec{A}$  (défini par  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ ), qui pour un problème à deux dimensions comme celui-ci n'a qu'une composante non nulle, sa composante  $A_z$  orthogonale au plan de la figure.

Figure 5. Maillage aux environs de l'entrefer.

La figure 6 représente la valeur de ce potentiel vecteur en tout point de la machine. On constate qu'il est négatif autour de l'encoche contenant des conducteurs parcourus par des courants entrant dans le plan de la figure et positif autour de l'autre encoche. Les lignes d'isovaleurs du potentiel vecteur correspondent aux trajectoires suivies par le flux magnétique. On constate bien que ce flux entoure les deux encoches.

Figure 6. Valeurs du potentiel vecteur.

Si on observe maintenant les valeurs du champ  $H$ , on voit sur la figure 7 que sa norme est quasi nulle partout sauf dans l'entrefer.

Figure 7. Norme du champ  $H$ .

Sur la figure 8, on a représenté enfin sous forme vectorielle, le champ  $H$  calculé en tout point d'un cercle situé au milieu de l'entrefer. On constate que cette représentation est assez proche de celle obtenue par le calcul analytique précédent (figure 3).

Les seules différences proviennent de la présence des encoches tant au rotor qu'au stator qui déforment localement le champ.

Figure 8. Représentation du vecteur  $H$  dans l'entrefer  $H$ .

#### *Question 4*

*On considère un enroulement formé de deux bobines de  $N/2$  spires chacune, étalées sur un angle  $a$  (et donc décalées d'un angle  $b = \frac{\alpha}{2}$ ), connectées en série et donc parcourues par le même courant  $I$ .*

*a) Quel est le champ  $H$  créé par cet enroulement ?*

*b) Calculer les coefficients de Fourier des harmoniques d'espace correspondant.*

*c) Quel angle d'étalement  $a$  permet l'annulation de l'harmonique 3 du champ ?*

*Quel angle  $a$  permet l'annulation de son harmonique 5 ?*

4a)

#### **Réponse**

$$H(\theta)e - H(\pi - \theta)e = 2H(\theta)e = NI$$

Figure 7. Animation.

#### **Démonstration**

Deux approches sont possibles pour le calcul de  $H$  :

1. soit procéder comme précédemment, à savoir appliquer le théorème d'Ampère à des contours bien choisis pour calculer  $H$  en tout point ;
2. soit considérer que le champ  $H$  créé par ces deux bobines peut-être calculé comme la somme des champs créés par chacune d'entre elles.

1. Application du théorème d'Ampère.

Deux types de contours peuvent être envisagés :

- Le premier entoure deux encoches parcourues des courants de même signe. Par application du théorème d'Ampère, on calcule :

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{N}{2} \cdot I + \frac{N}{2} \cdot I$$

Comme :

- $H$  est nul dans le fer et radial dans l'entrefer ;
- par raison de symétrie,  $H(q) = -H(p - q)$  ;

on obtient :

$$H(\theta)e - H(\pi - \theta)e = 2H(\theta)e = NI$$

soit encore :

$$H(\theta) = \begin{cases} \frac{NI}{2e} & \text{pour } (-\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}) < \theta < (\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}) \\ -\frac{NI}{2e} & \text{pour } (\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}) < \theta < (\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}) \end{cases}$$

- Le second passe entre les deux encoches parcourues par des courants de même signe. Par application du théorème d'Ampère, on calcule :

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Comme, par raison de symétrie, on a  $H(q) = -H(p - q)$ , on obtient :

$$H(\theta)e - H(\pi - \theta)e = 2H(\theta)e = 0$$

On en conclut que :

$$H(\theta) = \begin{cases} \text{pour } (\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}) < \theta < (\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}) \\ \text{et } (\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}) < \theta < (\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}) \end{cases}$$

**Le champ  $H$  est encore une fonction paire.**

2. Somme des champs créés par chacune des bobines.

On peut calculer le champ total créé par les deux bobines en additionnant le champ chacune d'entre elles. La première crée, en tout point de l'entrefer un champ déphasé de  $-\frac{\alpha}{4}$ , la seconde un champ déphasé de  $+\frac{\alpha}{4}$ .

### Verification

Tout comme cela a été fait dans le cas d'une bobine concentrée dans une paire d'encoche, on peut vérifier le calcul effectué au moyen de calculs de champs par éléments finis.

Figure 8. Valeurs du potentiel vecteur.

La figure 8 représente la valeur du potentiel vecteur  $\vec{A}$  (défini par  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ ) en tout point de la machine. On constate que les lignes d'isovaleurs qui correspondent aux trajectoires suivies par le flux magnétique entourent les deux paires d'encoches contenant les conducteurs.

Figure 9. Représentation du vecteur  $H$  dans l'entrefer  $H$ .

Les vecteurs représentatifs du champ  $H$  dans l'entrefer (figure 9), ont, aux effets d'encoche près, une allure assez proche de celle prédite par le calcul théorique (figure 10). On trouve une valeur nulle en tout point de l'entrefer situé entre deux encoches contenant des conducteurs parcourus par des courants de même signe, et des valeurs constantes (alternativement positives et négatives) ailleurs.

Figure 10. Résultat du calcul théorique.

4b)

### Réponse

Les coefficients de Fourier des harmoniques de rang pairs sont nuls.

Les coefficients de Fourier des harmoniques de rang impairs sont égaux à :

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e} \cos \left[ \frac{(2k+1)\alpha}{4} \right]$$

Figure 11. Animation.

### Démonstration

Là encore deux approches sont possibles :

1. soit le calcul direct ;
2. soit l'addition des composantes harmoniques des champs créés par chacune des bobines

#### 1. Calcul direct.

De même que précédemment, on calcule, compte tenu de la forme du champ :

$$H_n = \frac{1}{\pi} \int_{(-\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})}^{(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})} \frac{NI}{2e} \cdot (n\theta) \cdot d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})}^{(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})} \frac{NI}{2e} \cdot (n\theta) \cdot d\theta$$

Deux cas se présentent encore :

- soit  $n$  est pair ( $n = 2k$ ) et alors la fonction  $\cos(2k\theta)$  a une périodicité de  $\frac{\pi}{k}$ . L'intégrale de cette fonction calculée entre  $(-\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})$  et  $(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})$  est donc égale à celle calculée entre  $(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4})$  et  $(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})$ .

- On en déduit que les harmoniques de rang pair sont nuls.
- soit  $n$  est impair ( $n = 2k + 1$ ) et alors :

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e} \cos \left[ \frac{(2k+1)\alpha}{4} \right]$$

## 2. Addition des composantes harmoniques des champs créés par chacune des bobines.

L'harmonique de rang  $n$  du champ créé par deux bobines est égal à la somme des harmoniques de même rang des champs créés par chacune des deux bobines ; comme le champ  $H$  est une fonction paire, on a :

$$H_n \cdot \cos(n\theta) = H_{1n} \cdot \cos n\left(\theta - \frac{\alpha}{4}\right) + H_{2n} \cdot \cos n\left(\theta + \frac{\alpha}{4}\right)$$

où (pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ ) :

$$H_{in} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{(-1)^k NI}{(2k+1)\pi e} & \text{si } n = 2k + 1 \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que les harmoniques  $H_n$  de rang pairs sont nuls. Comme pour  $q = 0$ , on a :

$$H_n = H_{1n} \cos \left( \frac{-n\alpha}{4} \right) + H_{2n} \cos \left( \frac{n\alpha}{4} \right) \quad (1)$$

On en déduit que les coefficients de Fourier des harmoniques de rang impairs sont égaux à :

$$H_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e} \cos \left[ \frac{(2k+1)\alpha}{4} \right]$$

### Construction géométrique du coefficient $H_n$

L'équation (1) donne lieu à une interprétation géométrique immédiate qui permet de déterminer la valeur du coefficient  $H_n$  :

4c)

#### Réponse

- Annulation de l'harmonique de rang 3 :  $H_3$  s'annule pour

$$\cos \frac{3\alpha}{4} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ soit } \alpha = 120^\circ$$

- Annulation de l'harmonique de rang 5 :  $H_5$  s'annule pour

$$\cos \frac{5\alpha}{4} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5} \text{ soit } \alpha = 72^\circ$$

*Question 5*

*Reprendre les calculs de la question précédente en considérant cette fois un nombre  $m$  de bobines en série, régulièrement espacées, de  $N/m$  spires chacune, étalées sur un angle  $\alpha$  (et donc décalées d'un angle  $b = \frac{\alpha}{m}$ ).*

### Réponse

On procède par addition des champs  $H$  créés par chacune des  $m$  bobines.

Figure 12. Animation

Le champ  $H$  est encore une fonction paire.

### Démonstration

#### 1. Calcul du champ

On procède par addition des champs  $H$  créés par chacune des  $m$  bobines.

**Le champ  $H$  est encore une fonction paire.**

#### 2. Calcul des harmoniques d'espace

Pour calculer les harmoniques d'espace, on procède par addition des harmoniques de même rang des champs créés par chacun des enroulements.

D'une façon générale, comme le champ  $H$  est encore une fonction paire, l'harmonique d'espace de rang  $n$  du champ créé par l'ensemble des  $m$  bobines est égal à :

$$H_n \cdot \cos(n\theta) = \sum_{i=1}^m H_{i,n} \cdot \cos n \left[ \theta + \left( i - \frac{m+1}{2} \right) \frac{\alpha}{m} \right] \quad (1)$$

avec  $\forall i$  :

$$H_{i,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{H_{c,2k+1}}{m} & \text{si } n = 2k + 1 \text{ est impair} \end{cases}$$

où :

$$H_{c,2k+1} = \frac{(-1)^k 2NI}{(2k+1)\pi e}$$

représente le coefficient de l'harmonique de rang  $2k+1$  du champ que créeraient les  $N$  spires de l'enroulement si elles étaient concentrées dans deux encoches diamétralement opposées.

#### **Construction géométrique du coefficient $H_n$**

La construction géométrique qui permet de déterminer la valeur des coefficients  $H_n$  des harmoniques impaires est similaire à celle utilisée dans le cas où il y avait seulement deux bobines. Elle se base également sur la valeur de l'expression (1) calculée pour  $\theta = 0$ .

On en déduit que les coefficients  $H_n$  des harmoniques de rang impair s'écrivent :

$$H_{2k+1} = \frac{H_{c,2k+1}}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \cos \left( i - \frac{m+1}{2} \right) \frac{(2k+1)\alpha}{m} \quad (2)$$

- Dans le cas particulier où  $m = 3$ , on a ainsi :

$$H_{2k+1} = \frac{H_{c,2k+1}}{3} \left[ 2 \cos \frac{(2k+1)\alpha}{3} + 1 \right]$$

- $H_3$  s'annule pour :  $\cos \frac{3\alpha}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{2\pi}{3}$  soit  $a = 120^\circ$
- $H_5$  s'annule pour :  $\cos \frac{5\alpha}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{2\pi}{5}$  soit  $a = 72^\circ$
- Dans le cas particulier où  $m = 4$ , on a :

$$H_{2k+1} = \frac{H_{c,2k+1}}{5} \left( 2 \cos \left[ \frac{3(2k+1)\alpha}{8} \right] + 2 \cos \left[ \frac{(2k+1)\alpha}{8} \right] \right)$$

On vérifie, une fois de plus, que l'harmonique de rang 3 s'annule pour  $a = 120^\circ$  tandis que celle de rang 5 s'annule pour  $a = 72^\circ$ .

On peut étendre ce résultat à un nombre  $m$  quelconque de bobines. La somme (2) peut en effet être évaluée en considérant sa représentation géométrique.

$H_{2k+1}$  est ainsi représenté sur la figure 1, par le vecteur  $D_0 \vec{D}_m$ , somme des vecteurs  $D_0 \vec{D}_1$ ,  $D_1 \vec{D}_2$ , ...,  $D_{m-1} \vec{D}_m$ ,

- tous de même norme

$$|H_{i,2k+1}| = \frac{|H_{c,2k+1}|}{m}$$

- déphasés les uns par rapport aux autres d'un angle  $n \cdot b = \frac{n \cdot \alpha}{m}$ .

Figure 1. Animation.

Les points  $D_0$  à  $D_m$  s'inscrivent sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $OD_0$  (figure 2). Les points  $O, D_{i-1}, D_i, i = 1, 2, 1/4, m$  forment un triangle isocèle, d'angle  $g$  à la base et  $d$  au sommet. On montre aisément (cf. figure 2) que  $2g + n \cdot b = p$ .

Comme de plus la somme des angles d'un triangle est égale à  $p$ , on en déduit que  $2g + d = p$  d'où finalement  $d = n \cdot b$ .

Figure 2. Animation

La longueur du rayon  $OD_0$  est alors donnée par (cf. figure 3) :

$$OD_0 \cdot \sin \frac{n \cdot \beta}{2} = \frac{H_{i,2k+1}}{2}$$

et la valeur de la corde  $D_0 D_m$ , par :

$$D_0 D_m = 2 \cdot \left( Od_0 \cdot \sin \frac{n \cdot m \cdot \beta}{2} \right)$$

On en déduit finalement :

$$H_{2k+1} = H_{c,2k+1} \left( \frac{\sin \frac{n \cdot m \cdot \beta}{2}}{m \sin \frac{n \cdot \beta}{2}} \right)$$

soit encore, exprimé en fonction de l'angle d'étalement  $a$  :

$$H_{2k+1} = H_{c,2k+1} \left( \frac{\sin \frac{n \cdot \alpha}{2}}{m \sin \frac{n \cdot \alpha}{2m}} \right)$$

Figure 3. Animation.

On vérifie ainsi que, pour  $m$ , l'harmonique de rang 3 s'annule pour  $\sin \frac{3\alpha}{2} = 0$  soit  $a = 120^\circ$ , tandis que celui de rang 5 s'annule pour  $a = 72^\circ$ .

### Vérification

Tout comme cela a été fait dans le cas de bobines concentrées dans une ou deux paires d'encoches, on peut vérifier le calcul effectué au moyen de calculs de champs par éléments finis.

#### 1. Cas $m=3$

Figure 13. Valeurs du potentiel vecteur.

La figure 13 représente la valeur du potentiel vecteur  $\vec{A}$  (défini par  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ ) en tout point de la machine. On constate que les lignes d'isovaleurs qui correspondent aux trajectoires suivies par le flux magnétique entourent les deux groupes de trois encoches contenant les conducteurs.

Figure 14 : Représentation du vecteur  $H$  dans l'entrefer  $H$ .

Les vecteurs représentatifs du champ  $H$  dans l'entrefer (figure 14), ont, aux effets d'encoche près, une allure assez proche de celle prédite par le calcul théorique (figure 15). On trouve en tout point de l'entrefer situé entre des encoches contenant des conducteurs parcourus par des courants de signe opposé une valeur constante (soit positive, soit négative). Entre les encoches parcourues par des courants de même signe, cette valeur est réduite des deux tiers.

Figure 15 : Résultat du calcul théorique.

#### 2. Cas $m = 4$

Figure 16 : Valeurs du potentiel vecteur

La figure 13 représente la valeur du potentiel vecteur  $\vec{A}$  (défini par  $\vec{B} = r\vec{\text{rot}}\vec{A}$ ) en tout point de la machine. On constate que les lignes d'isovaleurs qui correspondent aux trajectoires suivies par le flux magnétique entourent les deux groupes de quatre encoches contenant les conducteurs.

Les vecteurs représentatifs du champ  $H$  dans l'entrefer (figure 14), ont, aux effets d'encoche près, une allure assez proche de celle prédite par le calcul théorique (figure 15). On trouve en tout point de l'entrefer situé entre des encoches contenant des conducteurs parcourus par des courants de signe opposé une valeur constante (soit positive, soit négative). Entre les encoches parcourues par des courants de même signe, on trouve successivement d'abord cette valeur réduite de moitié, puis une valeur nulle, et enfin de nouveau la valeur réduite de moitié mais avec un signe différent.

Figure 17 : Résultat du calcul théorique.

### Question 6

*Compte-tenu des résultats précédents, comparer pour une machine diphasée et triphasée dont les enroulements seraient étalés au maximum, les valeurs des coefficients de Fourier des différents harmoniques du champ.*

### Réponse

Pour une machine diphasée comportant deux enroulements  $a-a'$  et  $b-b'$ , l'angle d'étalement maximum que l'on peut considérer est de  $90^\circ$ <sup>2</sup>

Pour cet angle d'étalement, l'harmonique 3 peut être réduite à 13,9% de l'amplitude de la composante fondamentale du champ pour un bobinage réparti sur 2 encoches<sup>3</sup> et tend vers 11,1% de cette dernière quand  $m$  tend vers l'infini.

L'harmonique 5 vaut quant à elle entre 8,3% (pour  $m = 2$ ) et 4,0% (pour  $m \rightarrow \infty$ ) de la fondamentale<sup>4</sup>

Le prix à payer pour une telle réduction des taux d'harmonique est une réduction de 7,6% (pour  $m = 2$ ) à 10,0% (pour  $m \rightarrow \infty$ ) de la composante fondamentale du champ.

---

<sup>2</sup>Au-delà, cela nécessiterait de placer dans les mêmes encoches des conducteurs appartenant à deux enroulements différents et donc portés à des potentiels fort différents ce qui impliquerait une isolation plus importante, réduirait la densité de courant maximale dans ces encoches et donc le champ maximal.

<sup>3</sup>Au lieu de 33,3% pour un enroulement concentré.

<sup>4</sup>au lieu de 20,0% pour un enroulement concentré.

		Rang de l'harmonique						
		1	3	5	7	9	11	13
Nombre d'encoches	1	100,0%	33,3 %	20,0 %	14,3 %	11,1 %	9,1 %	7,7 %
	2	92,4%	12,8 %	7,7 %	13,2 %	10,3 %	3,5 %	2,9 %
	3	91,1%	11,1 %	4,9 %	3,5 %	3,7 %	8,3 %	7,0 %
	4	90,6%	10,6 %	4,3 %	2,6 %	2,0 %	1,9 %	2,4 %
	5	90,4%	10,4 %	4,0 %	2,3 %	1,6 %	1,3 %	1,2 %
	6	90,3%	10,3 %	3,9 %	2,1 %	1,4 %	1,1 %	0,9 %
	7	90,2%	10,2 %	3,8 %	2,0 %	1,3 %	1,0 %	0,8 %
	∞	90,0%	10,0 %	3,6 %	1,8 %	1,1 %	0,7 %	0,5 %

Tableau des amplitudes relatives des différents harmoniques pour  $a=90^\circ$

Pour une machine triphasée comportant trois enroulements  $a - a'$ ,  $b - b'$  et  $c - c'$ , l'angle d'étalement maximum que l'on peut considérer est de  $60^\circ$ .

Pour cet angle d'étalement, l'harmonique 3 est bien supérieure au cas précédent puisque comprise entre 24,4% (pour  $m = 2$ ) et 22,2% (pour  $m \rightarrow \infty$ ) de l'amplitude de la composante fondamentale du champ. Cependant cette composante n'a aucune influence. En effet, si on a une alimentation triphasée en courants (telle que la somme des courants de phases  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  soit nulle), on montre que la composante harmonique de rang 3 de la somme des champs créés par les trois enroulements de la machine est nulle :

L'harmonique 5 est réduite quant à elle à une valeur comprise entre 5,4% (pour  $m = 2$ ) et 4,0% (pour  $m \rightarrow \infty$ ) de la fondamentale. C'est la première composante harmonique significative et elle est, même pour un bobinage peu étalé ( $m = 2$ ), 2,6 fois plus faible que la première composante harmonique significative d'une machine diphasée.

On vérifie de plus que les autres composantes harmonique significatives sont toutes plus faibles que l'harmonique de rang 5. On a ainsi  $H_7$  vaut au plus (pour  $m = 2$ ), 3,8% de la composante fondamentale.

On note enfin que cette réduction du taux d'harmonique se fait au prix d'une réduction de seulement 3,4% (pour  $m = 2$ ) à 4,5% (pour  $m \rightarrow \infty$ ) de la composante fondamentale du champ.

		Rang de l'harmonique						
		1	3	5	7	9	11	13
Nombre d'encoches	1	100,0%	33,3 %	20,0 %	14,3 %	11,1 %	9,1 %	7,7 %
	2	96,6%	23,6 %	5,2 %	3,7 %	7,9 %	8,8 %	7,4 %
	3	96,0%	22,2 %	4,4 %	2,5 %	3,7 %	1,6 %	1,7 %
	4	95,8%	21,8 %	4,1 %	2,3 %	3,0 %	1,1 %	1,0 %
	5	95,7%	21,6 %	4,0 %	2,1 %	2,7 %	1,0 %	0,8 %
	6	95,6%	21,5 %	3,9 %	2,1 %	2,6 %	0,9 %	0,7 %
	7	95,6%	21,4 %	3,9 %	2,0 %	2,5 %	0,9 %	0,7 %
	∞	95,5%	21,2 %	3,8 %	1,9 %	2,4 %	0,8 %	0,6 %

Tableau des amplitudes relatives des différents harmoniques pour  $a=60^\circ$