

Illustrations et compléments : Notion de circuit magnétique - Application à la modélisation d'un électroaimant¹

1. Intérêt de la notion de circuit magnétique

Le couple électromagnétique C_{em} ou la force électromagnétique F_{em} que fournit un convertisseur électromagnétique, s'exprime comme étant la dérivée partielle en fonction de la position du rotor de la co-énergie magnétique, si celle-ci est exprimée en fonction des courants circulant dans les différents enroulements du convertisseur. Pour un convertisseur tournant, on écrit :

$$C_{em} = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial \theta_m}.$$

Pour un convertisseur linéaire :

$$F_{em} = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial x_m}.$$

La co-énergie magnétique W_{cmag} peut être calculée par intégration des relations liant les flux encerclés par les différents enroulements aux courants qui y circulent. Pour un convertisseur présentant n enroulements, on a :

– dans le cas d'un convertisseur tournant :

$$W_{cmag} = \int_{0,0,0,\dots,0}^{i_1,i_2,\dots,i_n} \sum_{k=1}^n \psi_k(i_1, i_2, \dots, i_n, \theta_m) di_k,$$

– dans le cas d'un convertisseur linéaire

$$W_{cmag} = \int_{0,0,0,\dots,0}^{i_1,i_2,\dots,i_n} \sum_{k=1}^n \psi_k(i_1, i_2, \dots, i_n, x_m) di_k.$$

Pour écrire les relations flux-courants, il peut être utile dans certains cas d'avoir recours à la **notion de circuit magnétique** (et à celle de **réductance** qui lui est associée) car cette notion permet de déduire directement les relations $\psi_k(i_1, i_2, \dots, i_n, \theta_m)$ ou $\psi_k(i_1, i_2, \dots, i_n, x_m)$ de la géométrie du dispositif étudié et de la perméabilité des matériaux qui le constituent.

2. Premier exemple de circuit magnétique

Pour introduire la notion de circuit magnétique, nous allons tout d'abord considérer une bobine comportant N spires enroulées autour d'un noyau toroïdal (Figure 1).

¹**Avertissement** : Il est possible que quelques erreurs subsistent dans ce document par rapport à la version définitive du site. Si tel était le cas, n'hésitez pas à le signaler aux auteurs du site.

Figure 1

3. Définition de contours d'intégration pour l'application du théorème d'Ampère

On peut calculer le champ magnétique créé par un courant I circulant dans la bobine, en appliquant le théorème d'Ampère à des contours circulaires situés dans des plans de coupe parallèles à la bobine et dont les centres sont sur l'axe de symétrie de la bobine (Figure 2).

Figure 2

4. Application du théorème d'Ampère - Mise en évidence d'un circuit magnétique

Par raison de symétrie, sur les contours d'intégration choisis, le champ d'induction \vec{B} induit par le courant I circulant dans la bobine est en tout point être tangent au contour et d'amplitude constante. On en déduit :

- si le contour à un rayon R_1 inférieur à R_i , rayon intérieur du noyau toroïdal (contour Γ_1 de la figure 2)² :

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{R \cdot B}{\mu_0} = 0; \quad (1)$$

- si le contour à un rayon R_2 supérieur à R_i et inférieur à R_e , rayon extérieur du noyau toroïdal (contour Γ_2 de la figure 2) :

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{R \cdot B}{\mu} = N \cdot I; \quad (2)$$

- enfin, si le contour à un rayon R_3 supérieur à R_2 (contour Γ_3 de la figure 2)

$$\oint_{\Gamma_3} \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = 2\pi \frac{R \cdot B}{\mu_0} = N \cdot I - N \cdot I = 0; \quad (3)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et de l'air et μ la perméabilité magnétique du matériau constitutif du noyau toroïdal.

On constate que le champ \vec{B} est nul en tout point situé en dehors du tore. Tout le flux induit par le courant i circule donc dans ce volume de la même manière que dans un circuit électrique, le courant électrique ne circule que dans les conducteurs. Par analogie, on peut définir le tore comme étant un circuit magnétique.

5. Loi d'Hopkinson

Si le rayon R_i et le rayon R_e du tore sont de valeur voisines (c'est-à-dire si les dimensions des spires sont faibles devant le rayon moyen ($R_m = (R_i + R_e)/2$)), on peut admettre, sans commettre d'erreur importante, que tous les contours d'intégration situés à l'intérieur du tore ont plus ou moins la même longueur égal à R_m .

Cette hypothèse revient à admettre que l'induction magnétique est constante en tout point d'une section droite du tore. Comme par ailleurs, l'induction \vec{B} est en tout point perpendiculaire à la section droite (puisque tangente au contours d'intégration), le flux ψ à travers une section droite du tore vaut approximativement :

$$\psi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S, \quad (4)$$

²en fait pour tout contour situé dans un plan qui ne couperait la bobine

où S est la section droite du tore.
 En combinant (2) et (4), on calcule

$$\psi = \frac{\mu \cdot S}{\ell} \cdot N \cdot I, \quad (5)$$

avec $\ell = 2 \cdot \pi \cdot R_m$

On appelle :

– $\mathcal{F} = N \cdot I$ la force magnétomotrice \mathcal{F} qui s'exprime en Ampère-tours (At) ;

– $\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu \cdot S}$, la réluctance du circuit magnétique.

ce qui permet d'écrire (5) sous la forme :

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \cdot \psi. \quad (6)$$

Cette équation est encore connue sous le nom de loi d'Hopkinson.

6. Analogies circuits magnétiques / circuits électriques

On peut facilement effectuer des analogies entre les circuits magnétiques et les circuits électriques :

- au flux magnétique ψ circulant dans un circuit magnétique, correspond le courant électrique I circulant dans un circuit électrique ;
- à la force magnétomotrice \mathcal{F} , correspond la force électromotrice U ;
- à la réluctance \mathcal{R} d'un conducteur magnétique de longueur ℓ , de section S et de perméabilité μ , correspond la résistance R d'un conducteur électrique de longueur ℓ , de section S et de conductivité σ ; on a $\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu \cdot S}$ et $R = \frac{\ell}{\sigma \cdot S}$;
- enfin, à la loi d'Hopkinson $\mathcal{F} = \mathcal{R} \cdot \psi$ correspond la loi d'Ohm $U = R \cdot I$.

On peut également définir la perméance $\mathcal{P} = 1/\mathcal{R}$ d'un circuit magnétique qui correspond la conductance $G = 1/R$ d'un circuit électrique.

Circuit magnétique	Circuit électrique
Flux (ψ)	Courant (I)
Force magnétomotrice (\mathcal{F})	Force électromotrice (U)
Réluctance (\mathcal{R})	Résistance (R)
Perméance (\mathcal{P})	Conductance (G)
Loi d'Hopkinson ($\mathcal{F} = \mathcal{R} \cdot \psi$)	Loi d'Ohm ($U = R \cdot I$)

Analogies circuits magnétiques / circuits électriques.

7. Application à la modélisation d'un convertisseur électromécanique

On se propose à titre d'exemple, d'appliquer la notion de circuit magnétique pour modéliser l'électroaimant de la figure 3, pour lequel on suppose que le flux est confiné dans les pièces en matériaux ferromagnétique et dans les entrefer qui les séparent.

Figure 3

8. Définition d'un circuit magnétique équivalent

Un calcul par éléments finis permet de vérifier la pertinence de l'hypothèse d'un flux circulant principalement dans les pièces ferromagnétiques et à travers les trois entrefers. Entre deux équiflux consécutives représentées sur la figure 4, circule toujours la même quantité de flux magnétique.

L'hypothèse posée revient en fait à négliger les flux de fuite (ceux qui ne traversent pas les entrefers), flux de fuite qui sont d'autant plus faibles que l'épaisseur des entrefer à traverser est petite ou que la perméabilité relative du matériau ferromagnétique est élevée³.

Figure 4

9. Réduction du circuit magnétique équivalent

Compte tenu de la symétrie du dispositif, il est possible de n'étudier qu'une moitié du circuit magnétique (Figure 5). Les flux qui circulent dans chacune des deux branches latérales sont en effet égaux et valent la moitié du flux qui circule dans la branche centrale ou encore le flux qui circule dans la moitié de cette branche centrale.

Figure 5

10. Relation flux courant

Connaissant la **longueur moyenne** ℓ et la **section droite** S des différents éléments du circuit magnétique ainsi que la perméabilité μ du matériau qui les constitue, on peut calculer les neufs réluctances de ce circuit à partir de la formule générale

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu \cdot S}.$$

Si μ_r est la perméabilité relative du matériaux ferromagnétique constituant le noyau ($\mu = \mu_r \mu_0$), perméabilité supposée constante quel que soit I (absence de saturation), on calcule :

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3 = \frac{b - \frac{a}{2}}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f} \quad ,$$

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_6 = \frac{e - a}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f} \quad ,$$

$$\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_8 = \frac{e}{\mu_0 \cdot a \cdot f} \quad ,$$

$$\mathcal{R}_5 = \mathcal{R}_7 = \frac{d - \frac{a}{2}}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f} \quad .$$

Les flux circulant dans chacune des deux branches du circuit (égaux chacun à la moitié du flux total) s'écrivent donc :

$$\frac{\psi}{2} = \frac{N \cdot I}{\sum_{i=1}^8 \mathcal{R}_i} = \frac{N \cdot I \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f}{2e + \frac{2b + 2c + 2d - 4a}{\mu_r}} \quad . \quad (7)$$

³Ce qui est suppose donc que les matériaux ferromagnétiques sont peu saturés.

On notera que si la longueur totale du circuit magnétique est négligeable devant μ_r fois la longueur totale des entrefers, on ne commettra pas une erreur importante dans l'établissement de la relation flux courant en considérant que la réluctance totale du circuit magnétique est égale à celle des entrefers⁴. Pour un μ_r supérieur à 1000 et des entrefers inférieurs à 1mm, cette approximation reste valable tant que la longueur totale du circuit reste bien inférieure à 2m.

11. Calcul de la co-énergie magnétique et de la force d'attraction

Le flux induit dans les N spires de la bobine s'écrit :

$$\Psi = N.\psi = L.I$$

avec, d'après (7),

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f}{e + \frac{b + c + d - 2a}{\mu_r}}$$

La co-énergie magnétique⁵ est alors égale à

$$W_{cmag} = \int_0^i \Psi di_k = \frac{1}{2} L.I^2.$$

La force d'attraction entre les deux éléments du noyau ferromagnétique s'écrit enfin :

$$F_{em} = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial e} = \frac{N^2 \cdot I^2 \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f}{2 \left(e + \frac{b + c + d - 2a}{\mu_r} \right)^2}$$

Elle est d'autant plus importante que e est faible avec un maximum égal à :

$$F_{em,max} = \frac{N^2 \cdot I^2 \cdot \mu_r \cdot \mu_0 \cdot a \cdot f}{2(b + c + d - 2a)^2}$$

pour $e = 0$.

⁴C'est en fait ce type de simplification qui est communément faite dans la modélisation des convertisseurs électromagnétique lorsque l'on suppose infinie la perméabilité des matériaux ferromagnétiques qui les constituent.

⁵qui est d'ailleurs égale comme cela est montré au §2.4.3 du livre à l'énergie magnétique puisque, en supposant μ_r constant, on s'est placé dans le cas où les relations flux-courant sont linéaires