

## Laboratoire virtuel : Moteur réluctant oscillant

La figure 1 donne une vue schématique en coupe d'un moteur à réluctance utilisé pour commander un mouvement oscillant des lames de coupe dans certains types de rasoirs électriques. En l'absence de courant dans la bobine un ressort maintient la partie mobile dans une position excentrée  $\theta = \theta_0$ , fixée par une butée mécanique (non représentée sur la figure). En faisant circuler un courant  $i$  dans la bobine on provoque l'apparition d'un couple d'origine électromagnétique qui tend à aligner la partie mobile sur la partie fixe. Si le courant  $i$  est un courant alternatif dont la fréquence est choisie de manière à être égale à la moitié de la fréquence propre d'oscillation du système mécanique formé par la partie mobile et le ressort de rappel, on crée un mouvement oscillant entretenu.

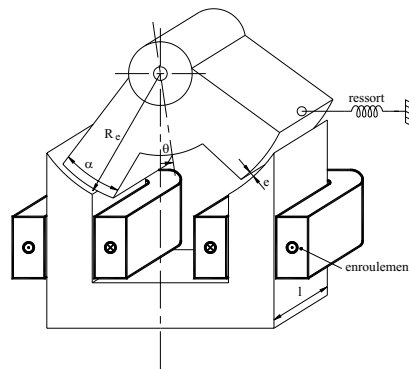


FIG. 1 –

Chaque enroulement de la bobine compte  $n$  tours. Les deux enroulements sont connectés en série.

$R_e$  est le rayon moyen de l'entrefer :  $R_e = 28\text{mm}$

$e$  est l'épaisseur de l'entrefer :  $e = 0,1\text{ mm}$

$\alpha$  est l'ouverture angulaire des pièces magnétiques au niveau de l'entrefer :  $\alpha = 9,2^\circ$

$L$  est la largeur du moteur :  $L = 28\text{ mm}$

$l$  est la largeur axiale du moteur :  $l = 12\text{ mm}$

$h$  est la hauteur maximale du stator :  $h = 38,2\text{ mm}$

$l_f$  est la longueur moyenne du noyau de fer :  $l_f = 7\text{ mm}$

$\theta$  est la position angulaire de la partie mobile par rapport à sa position d'alignement avec la partie fixe.

## 1. Calcul du couple d'origine électromagnétique sous l'hypothèse d'une perméabilité du fer infinie

### Question

Calculer le couple électromagnétique en fonction de la position du rotor  $\theta$  ( $|\theta| < \alpha$ ) et du courant  $i$  circulant dans les bobines. On considérera que la section de chacune des bobines est égale à  $115 \text{ mm}^2$  et que la densité de courant moyenne y atteint  $j = 1 \text{ A/mm}^2$ . On supposera que la perméabilité du fer est infinie et que les flux de fuite sont négligeables.

### Aide structurée

Comme démontré au paragraphe 2.5.2 du livre, le couple est égal à la variation, en fonction de la position, de la co-énergie magnétique stockée, lorsque celle-ci est exprimée en fonction du courant  $i$ .

→ mais encore

Dans le cas linéaire, la co-énergie magnétique est égale à l'énergie magnétique

$$W_{mag} = W_{cmag} = \frac{1}{2}Li^2$$

où  $L$  est l'inductance propre de l'enroulement.

→ mais encore

La perméabilité du fer étant infinie et, les flux de fuites négligeables, l'inductance propre de l'enroulement  $L$ , est égale à  $n$  fois le flux  $\phi$  qui traverse l'entrefer divisé par le courant qui circule dans l'enroulement

$$L = \frac{n\phi}{i}$$

→ mais encore

Si la perméabilité du fer est infinie

- le champ  $H$  dans le fer est nul
- le champ  $H$  aux surfaces de séparation du fer et des entrefers est perpendiculaire à cette surface.

Les flux de fuite étant négligeables (parce que les entrefers sont minces), on peut supposer que le champ d'entrefer  $H_e$  est constant et perpendiculaire aux pièces magnétiques dans la région où elles se font face.

### Réponse

Pour  $|\theta| < \alpha$ , on a :

$$C_{em} = \frac{-\mu_0 R \ell n^2 i^2}{4e} \frac{\theta}{|\theta|}$$

La figure 2 donne l'évolution de ce couple en fonction de la position pour  $ni = 230 \text{ A.tours}$ .

FIG. 2 – Evolution du couple en fonction de la position (hypothèse de perméabilité du fer infinie).

### Démonstration

Le champ  $H_e$  dans les entrefers (dans la zone où les pièces ferromagnétiques se font face) s'obtient en appliquant le théorème d'Ampère. Si on suppose la perméabilité du fer infinie, l'intégrale sur tout contour dans le fer traversant les entrefers dans la zone où les pièces magnétiques se font face fournit, (figure 3) :

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = H_{1e}e + H_{2e}e = ni$$

Par raison de symétrie les champs dans chacun des deux entrefers sont égaux en norme :  $H_{1e} = H_{2e} = H_e$ .

FIG. 3 – Contenu d'intégration.

Ils valent en tout point des entrefers :

$$H_e = \frac{ni}{2e}$$

Du champ  $\vec{H}_e$  dans les entrefers, on passe au champ  $\vec{B}_e$  par la relation  $\vec{B}_e = \mu_0 \vec{H}_e$ .  $\vec{B}_e$  étant perpendiculaire à la surface de l'entrefers, le flux  $\phi$  à travers chacun des entrefers

vaut donc, pour  $|\theta| < \alpha$  :

$$\phi = \int_S \vec{B} \vec{ds} = B_e R_e (\alpha - |\theta|) \ell = \frac{\mu_0 R_e (\alpha - |\theta|) \ell n i}{2e}$$

puisque l'ouverture angulaire des zones où les pièces ferromagnétiques sont en face l'une de l'autre est égale à  $\alpha - \theta$  pour  $\theta > 0$ , à  $\alpha - (-\theta)$  pour  $\theta < 0$ .

## 2. Prise en compte de la longueur du circuit magnétique

La longueur moyenne du noyau magnétique peut être estimée égale à (figure 4)

$$L_f = 2(L - \ell_f) + 2(h - \ell_f) = 104,4 \text{ mm}$$

FIG. 4 – Longueur moyenne du noyau magnétique.

Si on considère une perméabilité relative du fer égale à  $\mu_r = 2000$  (et non infinie), le rapport entre la longueur de ce noyau et la perméabilité relative du fer ( $L_f / \mu_r = 0,025 \text{ mm}$ ) n'est pas négligeable devant le rapport entre l'épaisseur des entrefers et la perméabilité relative de l'air ( $2e/1 = 0,2 \text{ mm}$ ). Il convient dès lors dans l'estimation du couple de tenir compte de la reluctance du noyau magnétique.

### *Question*

*Reprendre le calcul du couple électromagnétique en supposant la perméabilité relative du fer constante (absence de saturation) et égale à  $\mu_r = 2000$ . On continuera dans ce calcul à négliger les flux de fuite.*

### Réponse

Pour  $|\theta| < \alpha$ , on a :

$$C_{em} = \frac{-\mu_0 R_e \ell n^2 r^2 e}{[2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \ell_f}]^2} \frac{|\theta|}{\theta}$$

On constate, par rapport au cas où la perméabilité du fer est supposée infinie, une réduction du couple électromagnétique particulièrement sensible autour de  $\theta = 0$ . Elle représente une réduction de plus d'un quart par rapport au cas où la perméabilité du matériau magnétique est supposée infinie (figure 5).

FIG. 5 – Evolution du couple en fonction de la position.

### Démonstration

Par application du théorème d'Ampère sur le même contour que précédemment, contour supposé représenter le trajet moyen du flux magnétique dans le fer, on écrit :

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = 2H_e e + H_f L_f = ni \quad (1)$$

Les champs  $H_f$  et  $H_e$  respectivement dans le fer et dans l'entrefer sont liés aux valeurs d'induction  $B_f$  et  $B_e$  correspondantes par :

$$B_f = \mu_r \mu_0 H_f \quad (2)$$

$$B_e = \mu_0 H_e \quad (3)$$

Le flux étant conservatif, on peut écrire par ailleurs, pour  $|\theta| < \alpha$  :

$$\phi = B_e R_e (\alpha - |\theta|) \ell = B_f \ell_f \ell \quad (4)$$

En combinant (2) et (4) on peut dès lors exprimer le champ  $H_f$  en fonction de  $B_e$  :

$$H_f = \frac{B_e R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \mu_0 \ell_f} \quad (5)$$

En reportant cette expression dans (1) et compte tenu de (3), on calcule finalement :

$$B_e \left[ \frac{2e}{\mu_0} + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \mu_0 \ell_f} \right] = ni$$

soit encore :

$$B_e = \frac{\mu_0 ni}{\left( 2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \ell_f} \right)} \quad (6)$$

FIG. 6 – Evolution du champ  $B_e$  en fonction de la position.

L'évolution du champ  $B_e$  en fonction de la position du rotor est représentée sur la figure 6 pour  $ni = 230$  A.tour

On constate par comparaison avec la valeur du champ calculée en supposant la perméabilité du fer infinie, que l'effet de longueur du circuit magnétique est plus important lorsque les pièces polaires du rotor et du stator se font face ( $\theta = 0$ ). Cela peut s'interpréter par le fait que par cette position la réductance de la portion du circuit magnétique correspondant à l'entrefer

$$\mathcal{R}_e = \frac{e}{\mu_0 S_e} = \frac{e}{\mu_0 R_e (\alpha - |\theta|) e} \quad (7)$$

est minimale. L'influence de la réductance du noyau magnétique

$$\mathcal{R}_f = \frac{L_f}{\mu_0 \mu_r S_f} = \frac{L_f}{\mu_0 \mu_r \ell_f e} \quad (8)$$

sur l'expression du flux dans le circuit

$$\phi = \frac{ni}{\mathcal{R}_e + \mathcal{R}_f} \quad (9)$$

est dès lors maximale.

Le flux total encerclé par la bobine et donné par :

$$\psi = n\phi = \frac{\mu_0 \ell n^2 i}{\frac{2e}{R_e (\alpha - |\theta|)} + \frac{L_f}{\mu_r \ell_f}} \quad (10)$$

et l'inductance  $L$  s'écrit donc :

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{\mu_0 \ell n^2}{\frac{2e}{R_e (\alpha - |\theta|)} + \frac{L_f}{\mu_r \ell_f}} \quad (11)$$

Le couple électromagnétique, égal à la dérivée de la co-énergie (égale à l'énergie) magnétique en fonction de la position, lorsque celle-ci est exprimée en fonction du courant  $i$  vaut donc :

$$C_{em} = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} Li^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \theta} i^2$$

Ce qui peut encore s'écrire sous la forme, compte tenu de (11)

$$C_{em} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\mu_0 2e \ell n^2 i^2}{R_e (\alpha - |\theta|)^2}}{\left[ \frac{R_e}{R_e (\alpha - |\theta|)} + \frac{L_f}{\mu_r R_f} \right]^2} \frac{|\theta|}{\theta}$$

ou encore :

$$C_{em} = -\frac{\mu_0 R_e \ell n^2 i^2 e}{\left[ 2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \ell_f} \right]^2} \frac{|\theta|}{\theta}$$

### 3. Effet de la saturation

Le matériau ferromagnétique qui constitue le noyau n'a pas une perméabilité constante. Sa courbe de saturation est tracée sur la figure 7.

FIG. 7 – Centre de saturation de matériau magnétique.

En supposant que le matériau sature de manière homogène dans l'ensemble du noyau, calculer en  $\theta = 0$ , la valeur du champ  $H_f$ , en déduire la perméabilité relative du matériau en ce point de fonctionnement et calculer la valeur du couple électromagnétique correspondante.

#### Aide

Dès lors la valeur de la perméabilité relative  $\mu_r$  du matériau est nécessaire pour déterminer  $H_f$  et que la valeur de  $\mu_r$  dépend de  $H_f$ , le calcul est un calcul itératif.

#### Réponse

Pour  $\theta$  proche de zéro, l'induction  $B_e$  d'entrefer est minimum (cf. démonstration de la réponse à la question 2) et donc le champ  $H_e$ .

A ampères-tours constants dans les bobines, le champ  $H_f$  est alors maximal puisque, d'après le théorème d'Ampère, on a :

$$2H_e e + H_f L_f = nI$$

La position d'alignement des pièces rotoriques et statoriques correspond donc au point où le matériau constitutif du noyau est le plus saturé.

On a :

$$H_f = 958A/m \quad \text{pour} \quad B_f = 0,525T$$

Cela correspond à une perméabilité relative du milieu égale à :

$$\mu_{r,min} = \frac{B_f}{\mu_0 H_f} = 436$$

### Démonstration

La valeur du champ d'entrefer  $H_f$  est donnée par (cf. démonstration de la réponse à la question 2)

$$H_f = \frac{B_e R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \mu_0 \ell_f}$$

En considérant  $\mu_r = 2000$ , on calcule  $H_f = 317A/m$ .

Selon la courbe de saturation du matériau magnétique on a alors  $B_f = 0,420T$ . Cela correspond à une perméabilité relative du milieu égale à :

$$\mu_r = \frac{B_f}{\mu_0 H_f} = 1056.$$

En reprenant cette valeur de  $\mu_r = 1056$ , on calcule  $H_f = 531A/m$ , correspond à une valeur d'induction  $B_f = 0,481T$  et donc  $\mu_r = 720,3$ .

Par itérations successives on trouve le point de convergence pour :

$$H_f = 958A/m, \quad B_f = 0,525T \quad \text{et} \quad \mu_{r,min} = 436$$

Quelle que soit la position du rotor  $\theta$  avec  $|\theta| < \alpha$ , le couple électromagnétique est donc compris entre la valeur

$$C_{em,max} = \frac{-\mu_0 R_e \ell n^2 i^2 e}{\left[ 2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \ell_f} \right]}$$

calculée précédemment pour  $\mu_r = 2000$  et la valeur

$$C_{em,min} = \frac{-\mu_0 R_e \ell n^2 i^2 e}{\left[ 2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_{r,min} \ell_f} \right]}$$



FIG. 8 – Valeur maximales et minimales du couple en fonction de la position (hypothèse flux(??) saturé).

Les courbes correspondantes sont tracées sur la figure 8.

On constate que le couple autour de  $\theta = 0$  est réduit à 17 mN.m. L'effet de la saturation conduit donc à une réduction de plus de la moitié du couple électromagnétique (par rapport au cas linéaire non saturé).

En calculant pour chaque position la valeur de la perméabilité relative du milieu magnétique, on peut tracer la courbe  $C_{em}(\theta)$  (figure 9).

FIG. 9 – Couple en fonction de la position (hypothèse flux(??) saturé).

Le calcul néglige encore

- les flux de fuite
- les effets de saturation locale.

La technique des éléments finis permet l'intégration numérique des équations locales du champ magnétique (équation de Maxwell) en tout point de l'espace, ce qui permet de prédire la valeur du couple en fonction de la position du rotor de façon beaucoup plus précise.

La figure 10 montre en particulier que lorsque les pièces rotoriques et statoriques sont alignées, le champ dans la zone autour de l'entrefer peut atteindre localement plus de 0,7T (figure 10).

La matériau magnétique est alors complètement saturé. Pour atteindre ce niveau d'induction, le champ  $H_f$  doit atteindre localement les valeurs supérieures à 100.000 A/m.

La perméabilité relative du milieu ne dépasse pas alors dans ces zones  $\mu_r = 6$ . Ces effets de

FIG. 10 – Carte de l'induction  $B$  (calcul par éléments finis).

saturation locale expliquent en grande partie que le couple électromagnétique calculé par la technique des éléments finis soit encore beaucoup plus faible que celui produit par le calcul analytique (figure 11).

FIG. 11 – Couple en fonction de la position (calcul par éléments finis).

D'autant que le phénomène de saturation contribue à amplifier les flux de fuite, c'est-à-dire la partie du flux magnétique produit par les bobines qui ne circule pas dans les pièces magnétiques du rotor (figure 12).

Ces flux de fuite sont particulièrement importants quand les surfaces en regard des pièces rotoriques et statoriques sont faibles et donc plutôt pour les positions extrêmes du rotor.

FIG. 12 – Carte des flux (calcul par éléments finis).