

# La manipulation stratégique des règles de vote : une étude expérimentale \*

Virginie Béhue, Pierre Favardin

*CREM, Université de Caen*

Dominique Lepelley

*CERESUR, Université de la Réunion*

## 1 Introduction

L'un des résultats les plus connus et les plus fondamentaux de la théorie du choix social est le théorème de Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) qui énonce que les seules règles de choix collectif non manipulables par les agents sont les règles dictatoriales. Autrement dit, toute règle de choix collectif un tant soit peu démocratique se heurte à la difficulté suivante : il existe des situations dans lesquelles un agent (ou une coalition d'agents) est incité à exprimer une préférence non sincère de manière à obtenir un résultat collectif qu'il préfère à celui qu'il obtiendrait avec une stratégie sincère. Les comportements de "vote utile" ou de "passager clandestin" constituent des exemples bien connus de ce type de phénomène.

Ce résultat négatif a suscité une abondante littérature. En théorie du vote, l'une des réactions au théorème de Gibbard et Satterthwaite a été de s'interroger sur la fréquence théorique des situations dans lesquelles le vote stratégique est possible (voir Pritchard et Wilson, 2006, pour un panorama récent des principales contributions sur ce thème). Ce type d'investigations présente un double intérêt. En premier lieu, si l'on peut démontrer que, pour les règles de vote d'usage courant, la fréquence des opportunités de manipulations stratégiques est très généralement faible, alors la portée du théorème

---

Les auteurs remercient Rafik Abdesselam pour ses conseils précieux, ainsi que les deux rapporteurs anonymes pour la pertinence de leurs remarques. Merci aussi aux participants de la session *Économie publique des Journées de Microéconomie Appliquée* de Nantes (juin 2006).

## 2 Situations et règles de vote étudiées

Nous nous sommes restreints dans cette expérience à l'étude de la manipulation *individuelle*, qui suppose un contexte électoral non coopératif (absence de coalitions) ainsi qu'un nombre limité de votants. En effet, la probabilité pour qu'un individu puisse à lui seul modifier le résultat de l'élection est d'autant plus élevée que le nombre d'électeurs est réduit. Pour limiter le coût de l'expérience, nous avons, pour chaque situation électorale analysée, considéré le nombre minimal d'électeurs permettant de faire apparaître une possibilité de manipulation individuelle. Ce sont donc clairement des élections en comités (et non des élections de masse) que nous envisageons dans cette expérience.

Nous étudions des élections à *trois candidats* dans un environnement en *information parfaite*, ce qui signifie que les préférences des différents électeurs sont connaissance commune, conformément aux hypothèses habituellement émises pour étudier les comportements de vote stratégique individuels. Nous considérons des candidats fictifs<sup>3</sup>, que nous représentons par une lettre de l'alphabet: A, B et C. Nous nous sommes intéressés à trois règles de choix collectif : la règle de Borda, la règle de Copeland et le vote à la majorité simple (ou règle de la pluralité).

La règle de Borda est une règle de classement par points d'un usage courant : dans une élection à trois candidats, l'électeur donnera -s'il vote sincèrement- deux points au candidat qu'il préfère, un point au candidat intermédiaire et zéro point à celui qu'il aime le moins. Une idée communément admise en théorie du vote est que la règle de Borda est particulièrement vulnérable aux comportements stratégiques. Notre intérêt pour cette règle est directement lié à l'observation faite dans Favardin et Lepelley (2006) : l'évaluation de sa manipulabilité dépend en fait de la notion d'équilibre que l'on considère. Afin de pouvoir comparer la performance de la règle de Borda à celles de règles alternatives, deux autres mécanismes de choix collectif ont été analysés. La règle de Copeland (souvent confrontée à la règle de Borda en théorie du vote) consiste à opposer les candidats dans des duels à la majorité des voix ; avec trois candidats, trois duels sont ainsi organisés (A-B, A-C, B-C) ; le candidat qui remporte le plus de duels est alors le vainqueur de l'élection. Avec le vote à la majorité simple, on donne un point à un candidat et zéro aux autres ; le candidat qui a obtenu le plus grand nombre de points (de voix) est élu. En cas d'*ex aequo*, nous considérons pour chacune des règles que les candidats qui obtiennent le même score sont départagés en fonction de l'ordre alphabétique. Ce type de critère est couramment utilisé dans de nombreux contextes électoraux, où par exemple le candidat le plus âgé l'emporte en cas d'égalité<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> Cela signifie qu'aucun sujet n'endosse le rôle de candidat.

<sup>4</sup> Une autre façon de départager les *ex aequo* consiste à recourir à un tirage au sort. Ce mode de départage, assez peu utilisé dans la pratique des choix collectifs, présente l'inconvénient de compliquer les calculs stratégiques des votants.

$(ABC, BCA, CAB)$ <sup>6</sup> n'est pas un équilibre de Nash, tandis que le vecteur associé à la mise en oeuvre de la menace  $(ABC, CBA, CAB)$  est un équilibre de Nash ; c'est aussi le vecteur stratégique obtenu par élimination séquentielle des stratégies dominées.

Analysons maintenant la situation II. Dans un vote sincère à la Borda, les candidats A, B et C obtiennent respectivement cinq, cinq et deux points : c'est donc A qui l'emporte. Le troisième électeur peut être tenté d'exhiber un ordre de préférence non sincère dans lequel le candidat A est classé dernier : si les autres électeurs votent sincèrement, c'est alors B qui est élu par la règle de Borda. Le premier électeur peut cependant réagir à cette menace en classant B en dernière position, ce qui assure la victoire de A. **Nous nous attendons à ce que, dans une situation de ce type, le vainqueur sincère ait plus de chances d'être effectivement élu que dans une situation de type I.** En termes stratégiques, le vecteur  $(ABC, ACB, BCA, BCA)$ , qui met à exécution la menace, n'est pas un équilibre de Nash, contrairement au vecteur  $(ACB, ACB, BCA, BCA)$  qui associe menace et réaction.

Dans la situation III, le vainqueur sincère est B ; le premier électeur peut alors classer B en dernière position de manière à faire élire A. Dans ces conditions, le second électeur ne peut rétablir le vainqueur sincère (B) mais il peut faire élire le candidat C en le classant en première position, "punissant" ainsi le premier électeur puisque C est le candidat qu'il aime le moins. **Cette contre-menace peut dissuader le premier électeur de "tricher"**. On observera que le jeu de vote associé à la situation III ne possède pas d'équilibre de Nash.

Pour le vote à la majorité simple et la règle de Copeland, nous n'avons étudié que deux types de situation : menace sans réaction et menace avec réaction (cf. Tables 2 et 3). La notion de contre-menace ne peut en effet s'appliquer pour ces règles (on ne peut "punir" un électeur qui "menace" sans se punir soi-même). Pour chacune des règles, la situation avec menace et sans réaction est la même que celle que nous avons considérée pour la règle de Borda (cas I), **ce qui nous permettra de comparer les trois règles pour ce cas de figure.** On notera que cette situation correspond au célèbre paradoxe de Condorcet : deux électeurs sur trois préfèrent A à B, deux électeurs sur trois préfèrent B à C et deux électeurs sur trois préfèrent C à A. Pour le vote à la majorité simple comme pour la règle de Copeland, et compte tenu de la règle utilisée pour départager les *ex aequo*, l'expression sincère des préférences amène ici le même vainqueur que la règle de Borda, à savoir le candidat A. Le deuxième électeur peut alors faire élire C, sans qu'il y ait de réaction possible de la part des deux autres. Si l'on utilise le vote à la majorité simple, il lui suffit de voter C ; si c'est la règle de Copeland qui s'applique, il obtient la victoire de C en votant stratégiquement C dans le duel opposant B et C.

<sup>6</sup> Les préférences affichées par les électeurs sont ici présentées horizontalement.

### 3 Protocole expérimental

L'expérience a été réalisée à l'université de Caen auprès de 47 étudiant(e)s de première année de licence de Sciences Economiques ou d'Administration Economique et Sociale. Elle a été effectuée en début d'année universitaire afin d'éviter que les sujets ne se connaissent.

Nous avons procédé à trois sessions expérimentales : une pour chacune des règles de vote étudiées.

Chaque session était organisée comme suit. A leur arrivée, nous faisons asseoir les participants dans une salle de classe et nous leur distribuons une pochette contenant les instructions, un numéro d'identification <sup>7</sup>, des bulletins de vote, les schémas de paiement et des fiches d'enregistrement des paiements <sup>8</sup>. Nous leur donnons environ cinq minutes pour lire les instructions, après quoi nous leur expliquons la règle de vote utilisée, et nous répondons publiquement à leurs questions. Deux élections "blanches" sont alors réalisées, qui nous permettent de nous assurer que les sujets ont bien compris le fonctionnement de la procédure de vote. Une fois ces deux essais effectués et les dernières questions posées, nous leur expliquons qu'ils n'ont plus le droit de communiquer pendant toute la durée de l'expérience. Les participants sont répartis en groupes de vote, chacun correspondant à l'une des situations électorales étudiées. Ces groupes vont simultanément participer à des élections distinctes, mais exactement dans les mêmes conditions et dans la même salle. Chaque groupe de votants participe à une série de quatre à six élections successives, puis les sujets sont affectés à un nouveau groupe, avec lequel ils participent à nouveau à plusieurs élections répétées. Cette opération est finalement réitérée une dernière fois. Nous nous sommes arrangés, dans la mesure du possible, pour que chaque sujet ne participe pas deux fois à la même situation électorale. Si tel n'était pas le cas, le sujet se voyait de toute façon attribuer un rôle différent. Cette opération nous permet de maximiser le nombre d'observations tout en minimisant les effets de jeux répétés.

Dans leur pochette, les sujets trouvent les trois schémas de paiement définissant la configuration des préférences des trois groupes de vote auxquels ils vont appartenir. Pour éviter toute confusion, nous avons distingué ces groupes en utilisant des feuilles de couleur différente. Dans chaque groupe, nous avons (re)nommé les candidats par des lettres différentes et les électeurs par des prénoms distincts, ce qui nous permet d'éviter toute interférence entre les groupes et les diverses élections. Par ailleurs, nous avons permuté les lignes des schémas de paiement de chaque sujet, ce qui rendait

<sup>7</sup> Nous attribuons à chaque sujet un numéro d'identification qu'il conservera pendant toute l'expérience. Ce numéro nous permettra d'observer les votes qu'il aura soumis au cours de toutes les élections auxquelles il aura participé.

<sup>8</sup> Les instructions relatives à la règle de Borda sont disponibles en annexe.

## 4 Résultats

Nous présentons dans cette section une analyse des résultats que nous avons obtenus.

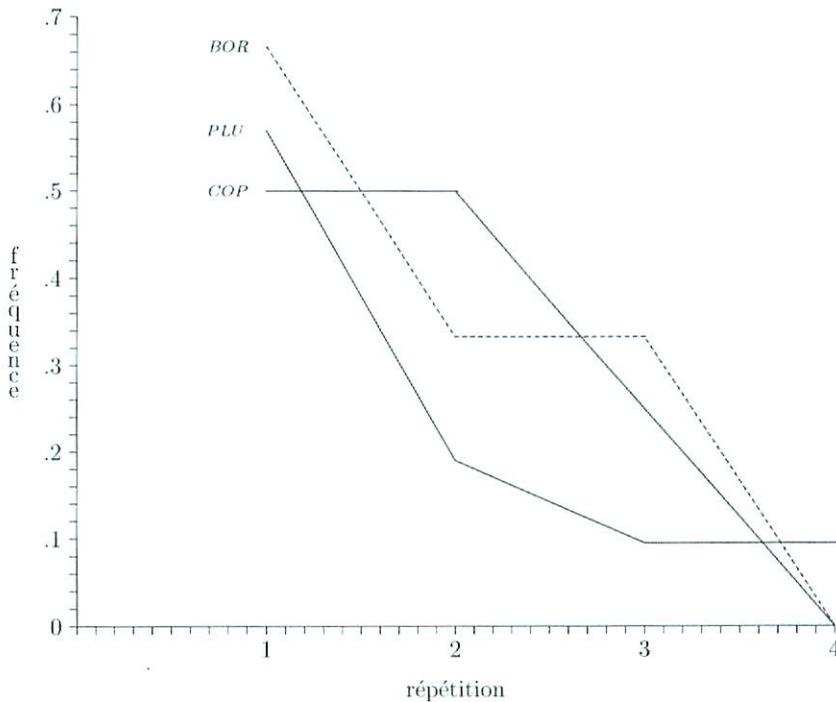
La question qui nous intéresse au premier chef est la suivante : la présence d'une réaction ou d'une contre-menace dans une situation où l'un des votants a intérêt à exprimer une préférence non sincère a-t-elle ou non une influence sur l'élection du vainqueur sincère ? Pour répondre à cette question, nous avons calculé la fréquence d'élection du vainqueur sincère avec et sans réaction (ou contre-menace). Les résultats sont présentés dans les Tables 5 et 6. Deux traitements ont été réalisés. Dans la Table 5, nous prenons en considération dans le calcul de fréquence la totalité des élections que nous avons organisées (soit 131 élections, tous types de situations et toutes règles confondues). Dans le second traitement (Table 6), nous ne considérons, pour chaque groupe d'électeurs, que les quatre premières élections. En effet, selon les groupes, une même élection était répétée quatre, cinq ou six fois, au choix de l'expérimentateur. D'une manière générale, nous avons arrêté au bout de quatre répétitions lorsque les résultats devenaient stables (chaque sujet répétant la même stratégie lors de deux votes successifs) et nous avons poursuivi les répétitions dans le cas contraire. La déformation possible des résultats qui en résulte peut être évitée en ne considérant que les quatre premières répétitions : le nombre total d'élections pris en compte est alors de 100.

	Borda	Majorité simple	Copeland
sans réaction	0,4117 (7/17)	0,5 (10/20)	0,3 (6/20)
avec réaction	0,7058 (12/17)	0,95 (19/20)	0,85 (17/20)
avec contre-menace	0,3529 (6/17)		

**Table 5 :** *Fréquence d'occurrence du résultat sincère (données brutes)*

	Borda	Majorité simple	Copeland
sans réaction	0,3333 (4/12)	0,4375 (7/16)	0,3125 (5/16)
avec réaction	0,75 (9/12)	0,9375 (15/16)	0,875 (14/16)
avec contre-menace	0,1667 (2/12)		

**Table 6 :** *Fréquence d'occurrence du résultat sincère (données limitées aux quatre premières répétitions d'une même élection)*



**Figure 1:** *Apprentissage de la manipulation : fréquence d'occurrence du vainqueur sincère selon le numéro de répétition de l'expérience -le cas d'une menace sans réaction.*

## 5 Conclusion

L'analyse expérimentale que nous avons présentée comporte au moins deux enseignements utiles pour la théorie du vote et, particulièrement, pour les études analytiques de la vulnérabilité des règles de vote aux manipulations stratégiques individuelles. Typiquement, ces études s'efforcent de dénombrer, pour une règle donnée, les situations où un électeur est en position de manipuler et évaluent la vulnérabilité de la règle considérée par la proportion de ces situations, l'objectif de l'étude étant de repérer les règles les moins vulnérables. Une critique fréquente de cette approche consiste à faire remarquer qu'elle ne prend pas en compte la difficulté de la manipulation : selon la règle considérée, la détermination de la stratégie permettant la manipulation peut être plus ou moins compliquée. Nos résultats ne permettent pas de valider cette critique ; il apparaît au contraire que, pour le profil de préférences étudié, les trois règles que nous avons considérées ont des performances voisines :

Pritchard, G. et M.C. Wilson (2006). "Exact results on manipulability of positional voting rules", *Social Choice and Welfare* 29, 487-513.

Satterthwaite, M. A. (1975). "Strategy-proofness and Arrow's conditions : existence and correspondance theorems for voting procedures and social welfare functions", *Journal of Economic Theory* 10, 187-217.

Slinko, A. (2002). "On asymptotic strategy-proofness of classical social choice rules", *Theory and Decision* 52, 389-398.

Auteur chargé de la correspondance : Dominique Lepelley. Tel: (33) 2 62 93 84 48.  
Courriel : dominique.lepelley@univ-reunion.fr.

## Annexe

### Les instructions de la session avec la règle de Borda

#### Généralités

Cette expérience est une étude des procédures de vote.

Au cours de cette expérience, vous devrez choisir entre trois candidats selon la règle de vote définie par la suite.

Vos décisions de vote conditionneront vos gains.

L'expérience devrait durer environ une heure.

#### Le déroulement d'une élection

A chaque élection, vous devrez choisir entre trois candidats dénommés par une lettre de l'alphabet.

Vous devrez remplir un bulletin de vote selon la règle suivante:

**"Vous devez donner deux points à un candidat, un point à un autre et zéro point au troisième. Le candidat qui obtient le plus de points est alors le vainqueur de l'élection. En cas d'égalité entre deux ou trois candidats, celui correspondant à la lettre qui arrive en premier dans l'ordre alphabétique est élu."**

Une fois remplis, les bulletins sont collectés et dépouillés de sorte que vous pourrez déterminer votre gain.