Incertitude sur l'effet global ou sur les délais d'action de la politique monétaire : politique robuste et activisme

Daniel Laskar [*]

1 Introduction

Le fait qu'il y ait une incertitude sur l'effet de la politique économique est un problème auquel doivent faire face les décideurs politiques. Ainsi, les responsables de la politique monétaire ont souvent mis l'accent sur l'importance de ce problème [1]. Une question qui se pose alors est celle de savoir si une telle incertitude doit conduire les décideurs politiques à mener une politique moins activiste ou non. A ce sujet, le résultat de Brainard (1967) sert souvent de référence, puisque ce dernier développe l'argument qu'une incertitude sur le paramètre représentant l'effet de la politique conduit en général à une politique moins activiste. Par ailleurs, au sujet de la politique monétaire, il existe un argument classique de Friedman (1960) selon lequel, en raison de la grande incertitude portant sur les délais d'action de celle-ci, il est sans doute même préférable de s'abstenir complètement d'utiliser la politique monétaire pour stabiliser l'économie (et suggère à la place une règle où la masse monétaire croîtrait à un taux donné). En effet, alors que les effets à plus long terme de la politique monétaire peuvent être relativement bien connus, Friedman souligne que l'on a très peu de connaissance sur les délais d'action à court ou moyen terme. Et il s'appuie sur des travaux empiriques portant sur l'histoire monétaire des Etats-Unis, où il tente de mettre en évidence les effets néfastes d'utilisations intempestives de la politique monétaire à des fins de stabilisation.

Des travaux plus récents ont pu remettre en question ce résultat de moindre activisme dû à l'incertitude. En premier lieu, certains travaux ont montré que lorsque, dans un cadre dynamique, l'incertitude portait sur un

* PSE (unité de recherche jointe CNRS-EHESS-ENPC-ENS) et CEPREMAP. Adresse : CEPREMAP, 142 rue du Chevaleret, 75013 Paris. Tél : 01 40 77 84 08. Fax : 01 44 24 38 57. E-mail : daniel.laskar@pse.ens.fr.
La présente version a bénéficié des remarques d'un rapporteur anonyme.

1 Voir par exemple Greenspan (2004).

paramètre de persistence au cours du temps (par exemple de persistence de l'inflation dans une courbe de Phillips), il devenait possible qu'une plus grande incertitude conduise à une politique plus agressive [2]. En second lieu, les résultats peuvent être différents lorsque, à la place de l'approche bayésienne traditionnelle, qui était celle de Brainard et des travaux que l'on vient de mentionner, on adopte une approche en termes de "robustesse". Alors que dans l'approche bayésienne le décideur a une loi de probabilité sur le ou les paramètres incertains et utilise un critère de maximisation de l'utilité espérée (ou de minimisation de la perte espérée), l'approche en termes de robustesse utilise un critère du maximin de l'utilité espérée (ou du minimax de la perte espérée) par rapport à un ensemble de probabilités sur ces paramètres qui sont jugées possibles. La politique est ainsi "robuste" par rapport à toutes les probabilités considérées. Un tel comportement face à l'incertitude, qui reprend la distinction opérée par Knight (1921) entre "risque" et "incertitude", a reçu une formalisation axiomatique par Gilboa et Schmeidler (1989). Une approche en termes de robustesse s'est particulièrement développée dans les années récentes [3]. Son application, principalement pour la politique monétaire, a montré que des politiques robustes pouvaient, à l'encontre du résultat de Brainard, s'avérer plus activistes qu'en cas de certitude sur le modèle de référence [4]. Toutefois, comme dans le cas bayésien, il s'avère que le résultat peut en fait dépendre de l'endroit où se trouve l'incertitude dans le modèle [5].

Comme on l'a indiqué, aussi bien Brainard (1967) que Friedman (1960) conduisent à préconiser moins d'activisme, et on pourrait penser que les deux types d'arguments correspondants conduisent aux mêmes résultats en ce qui concerne l'activisme des politiques. Cela semble, par exemple, être l'opinion de Bean (1998) quand il écrit : "Le deuxième argument est que l'effet des actions de la politique peut être incertain. Dans ce cas, de larges actions tendront à accroître le montant d'incertitude dans l'économie, et une approche plus prudente est requise. Tel était l'argument de Brainard ; en essence, il a simplement formalisé l'intuition de Friedman que l'existence de "délais longs et variables" dans le mécanisme de transmission de la politique monétaire devrait conduire les banquiers centraux à être modestes dans leurs aspirations à contrôler le niveau de la demande nominale." (p. 115). Il serait toutefois souhaitable d'examiner de manière plus précise si les deux situations d'incertitude sous-jacentes, incertitude sur l'effet global de la politique (qui est celle de Brainard (1967)), d'une part, et incertitude sur

---

2 Voir Craine (1979), Shuetrim et Thompson (1999) et Söderström (2002).

3 Pour une synthèse voir par exemple Hansen et Sargent (2005), qui effectue également le lien avec la théorie du contrôle robuste.

4 Voir Giannoni (2002), Sargent (1999) et Stock (1999). Ceci va à l'encontre de l'observation que la politique monétaire est dans la réalité moins agressive que ne le suggère la politique optimale en certitude d'après les modèles existants de la politique monétaire. Remarquons que le principe de Brainard ne permet pas non plus d'expliquer cet écart, car son montant semble insuffisant (Rudebusch (2001)).

5 Voir Liu et Dupor (2004) qui essayent de donner des critères relativement généraux permettant de décider si la politique sera atténuée ou non.

ses délais d'action (qui est celle de Friedman (1960)), d'autre part, ont des conséquences similaires ou non en ce qui concerne l'activisme de la politique, et c'est le but que l'on se propose dans ce papier. Un aspect crucial de l'analyse que l'on va effectuer consiste alors à adopter successivement dans chaque cas les deux approches de l'incertitude mentionnées, approche bayésienne et approche en termes de robustesse, et à se demander si ces deux approches de l'incertitude conduisent ou non à des résultats différents pour la question considérée [6].

On montrera que, quand on utilise une approche bayésienne de l'incertitude, ce que dit Bean se justifie, c'est à dire qu'une incertitude sur l'effet global et une incertitude sur les délais d'action conduisent tous deux à des résultats semblables, une incertitude accrue menant dans chaque cas, et de manière similaire, à moins d'activisme. Par contre, on obtiendra le résultat que ces deux types de situations d'incertitude diffèrent nettement quand on prend une approche en termes de robustesse. Ainsi, on montrera qu'une incertitude sur l'effet global de la politique, contrairement à ce que donne l'approche bayésienne de Brainard, ne rend pas toujours la politique robuste moins activiste ; et le résultat dépend de conditions sur les paramètres du modèle que l'on explicitera. En revanche, dans le cas d'une incertitude sur les délais d'action de la politique, on montrera que plus l'incertitude est grande moins la politique robuste est activiste. De plus, on obtiendra le résultat que dans ce cas la politique robuste est toujours moins activiste que ce que donne une approche bayésienne. Ces résultats soulignent que l'argument spécifique de Friedman (1960) concernant les délais d'action, reçoit un poids accru quand on adopte un critère de robustesse plutôt qu'une approche bayésienne.

Dans la section 2 on considère un modèle statique proche de celui de Brainard (1967), où il existe une incertitude sur l'effet global de la politique, que l'on essayera aussi d'interpréter en termes d'un modèle simple de politique monétaire. On déterminera et comparera politique bayésienne et politique robuste, en particulier en ce qui concerne leur niveau d'activisme [7]. Dans

[6] Von zur Muehlen (2000) compare également les deux approches, bayésienne et en termes de robustesse, dans un cadre d'analyse qui présente certaines similarités avec celui que l'on utilisera. Toutefois, si cet auteur considère bien le cas d'une incertitude portant sur l'effet de la politique, il n'examine pas le cas d'une incertitude du type de celle soulignée Friedman (1960), qui porte sur les délais d'action alors que l'effet cumulé au cours du temps est connu. De plus, von zur Muehlen (2000) se limite dans son analyse de l'incertitude au cas où le poids accordé à la stabilisation de la variable de contrôle est nul, ce qui, comme on le verra, conduit à des résultats restrictifs.
Onatski (2000) effectue aussi une comparaison entre politique bayésienne et politique robuste dans un modèle statique où il existe à la fois une incertitude sur l'effet global de la politique ainsi qu'une incertitude sur un terme additif. L'analyse, comme dans von zur Muehlen (2000), suppose qu'il n'y a pas de poids accordé à la stabilisation de la variable de contrôle.

[7] Svensson (2000) obtient des expressions semblables pour la politique robuste dans un modèle dynamique de courbe de Phillips mais n'examine pas comment l'incertitude affecte l'activisme de la politique et ne compare pas cette politique robuste à la politique qui résulterait d'une approche bayésienne. Une autre différence est qu'il ne considère pas comme on le fait ici , la possibilité que l'effet de la politique monétaire puisse être nul ou même "pervers" (c'est à dire puisse changer de signe par rapport au modèle de référence).

la section 3 on essaye de prendre en compte le type d'incertitude correspondant à l'argument de Friedman (1960) [8], et pour cela on prend un modèle à plusieurs périodes où l'effet global sur l'ensemble des périodes de la politique est connu, mais où le profil temporel de l'effet de la politique est incertain. La section 4 conclut.

2 Incertitude sur l'effet global de la politique

2.1 Modèle utilisé

On représente le problème d'optimisation du décideur politique par le modèle linéaire-quadratique statique très simple suivant [9] :

$$x = \alpha u + \eta \qquad (1)$$

$$\Omega = x^2 + \psi u^2 \qquad (2)$$

où u est la variable de contrôle du décideur politique, x une variable endogène qui d'après (1) est une fonction linéaire de u, la variable η représentant un choc affectant cette relation, choc qui est supposé connu du décideur politique [10]. L'équation (2) exprime la fonction de perte du décideur politique. Celui-ci désire donc stabiliser, par rapport à sa valeur désirée, la variable cible x ainsi que la variable de contrôle u, chaque valeur désirée étant ici normalisée à zéro. Le paramètre $\psi \geq 0$ détermine le poids relatif attribué à la stabilisation de u par rapport à celle de x. On suppose $\eta \neq 0$, afin qu'il se pose un dilemme pour le décideur entre la stabilisation de u et celle de x .Utilisant (1) et (2) on a :

$$\Omega = (\alpha u + \eta)^2 + \psi u^2 \qquad (3)$$

La valeur du paramètre α, qui représente l'effet global de la politique considérée, est supposée être incertaine. On part d'un modèle de référence où α est égal à $\alpha_0 \neq 0$, et on considère une incertitude sur α qui est centrée autour de α_0. On suppose que α appartient à l'intervalle $[\alpha_0 - \gamma, \alpha_0 + \gamma]$, avec $\gamma \geq 0$. On considèrera successivement et on comparera deux approches de l'incertitude.

---

[8] Liu et Dupor (2004) tentent de relier l'argument de Friedman (1960) à leur conditions générales et suggèrent que le cas de Friedman correspond bien à celui où la politique robuste est atténuée, c'est à dire moins activiste. Leur argument sur ce point est toutefois non formalisé.

[9] Dans le cas particulier $\psi = 0$, où le poids attibué à la variable de contrôle dans la fonction de perte est nul, on retrouve le modèle de base de Brainard (1967).

[10] Si on avait fait l'hypothèse que ce choc est une variable aléatoire qui n'est pas connue mais qui est indépendante du paramètre incertain α (hypothèse qui correspond dans Brainard (1967) au cas de référence qui permet d'obtenir le principe de moindre activisme), on peut vérifier facilement que, du fait du caractère linéaire-quadratique du modèle, il y aurait équivalence au certain, c'est à dire que, pour la détermination des politiques optimales, on pourrait remplacer le choc η par son espérance $E\eta$. Il faudrait donc dans ce cas d'interpréter η comme étant l'espérance du choc au lieu du choc lui-même.

Dans la première, l'approche bayésienne, qui est celle de Brainard (1967), on suppose que le décideur a une probabilité sur α, symétrique par rapport à α_0 et donc satisfaisant $E\alpha = \alpha_0$, et qu'il minimise l'espérance mathématique de la fonction de perte correspondante.

Dans la seconde approche, qui a reçu une justification axiomatique dans Gilboa et Schmeidler (1989), le décideur n'a pas une probabilité unique mais un ensemble de probabilités sur α, et il utilise un critère du minimax sur l'ensemble de ces probabilités afin de calculer sa politique optimale. Celle ci est donc la valeur de u qui minimise $\max_{P_\alpha \in \Pi} E\Omega$, où P_α est une loi de probabilité sur α et où Π est l'ensemble de ces lois de probabilité. On va de plus supposer que dans ce cas la seule connaissance dont dispose le décideur est que α appartient à l'intervalle $[\alpha_0 - \gamma, \alpha_0 + \gamma]$. L'ensemble Π est donc l'ensemble de toutes les lois de probabilités sur α de support $[\alpha_0 - \gamma, \alpha_0 + \gamma]$, et le paramètre γ représente donc le montant de l'incertitude. La politique ainsi obtenue est donc "robuste" par rapport à l'ensemble de toutes ces probabilités [11].

Pour un choc donné, on considèrera qu'une politique est d'autant plus "activiste" en réponse à ce choc que la variable de contrôle u s'écarte davantage en valeur absolue du niveau auquel elle serait en l'absence de celui-ci. Comme dans ce dernier cas on aurait $u = 0$, la politique est donc d'autant plus activiste que la valeur de $|u|$ en réponse à ce choc est plus élevée.

2.2 Cas de la politique monétaire

Le modèle précédent pourrait représenter différents contextes de politique économique et l'analyse qui sera effectuée par la suite en restera à ce niveau général. Toutefois, la plupart des travaux sur ce thème, tels que ceux mentionnés dans l'introduction, se sont principalement attachés au cas cas de la politique monétaire, et on aimerait également lui donner une importance particulière. Il est donc souhaitable de pouvoir mieux interpréter le modèle dans ce cas. Un modèle assez standard de l'analyse de la politique monétaire consiste en deux équations : une "courbe de Phillips" reliant le taux d'inflation au niveau de la production ; et une courbe "IS" reliant la production au taux d'intérêt [12]. On suppose que la Banque centrale a le désir de stabiliser

---

[11] Remarquons que le critère de robustesse est obtenu par rapport à une incertitude "paramétrique" concernant le coefficient α représentant l'effet de la politique. Or la littérature sur le contrôle robuste, telle que celle de Hansen et Sargent (2005), considère plutôt une incertitude portant sur un terme additionnel de l'équation du modèle. De plus, cette incertitude n'est pas nécessairement paramétrique (voir par exemple Stock (1999) et Tetlow et von zur Muehlen (2001) sur cette distinction entre incertitude paramétrique (ou "structurée") et non paramétrique (ou "non structurée")). Dans l'annexe G on a considéré une incertitude additive, et on a essayé de mieux faire le lien avec la littérature sur le contrôle robuste, en particulier avec Hansen et Sargent (2005).

[12] Voir par exemple Clarida et al. (1999) ainsi que les modèles figurant dans Taylor (1999).

le taux d'inflation et le niveau de la production. Une version statique d'un tel modèle pourrait s'écrire sous la forme [13] :

$$\pi = a_y y + \nu_1 \tag{4}$$

$$y = -a_r r + \nu_2 \tag{5}$$

$$\Omega = \pi^2 + \chi y^2 \tag{6}$$

Dans ces équations, π représente le taux d'inflation (en écart à son niveau désiré) ; y représente la production et r le taux d'intérêt réel, chacun d'eux étant exprimé en écart par rapport à son niveau "naturel", c'est à dire par rapport à celui qui s'obtiendrait si les prix étaient flexibles. Les variables ν_1 et ν_2 représentent des chocs, qui sont supposés connus des autorités monétaires. L'équation (4) est la courbe de Phillips et (5) la courbe IS. L'équation (6) représente la fonction de perte. On suppose que la banque centrale contrôle le taux d'intérêt réel r [14]. On considère qu'il existe une incertitude sur l'effet de la politique monétaire, les coefficients a_y et a_r pouvant être incertains.

On va souligner que lorsque l'incertitude porte sur un seul de ces paramètres a_y ou a_r, on peut se ramener directement au modèle de base $\{(1), (2)\}$ qui sera utilisé [15]. Considérons en premier lieu le cas où le paramètre a_r est connu et où par conséquent l'incertitude ne porte que sur le coefficient a_y de la relation de Phillips. Dans ce cas, la variable de production y devient contrôlable et l'équation (1) du modèle correspond à la courbe de Phillips (4) [16]. En posant $u = y$, $x = \pi$, $\alpha = a_y$, $\eta = \nu_1$ et $\psi = \chi$, les équations (4) et (6) se mettent de manière immédiate sous la forme du modèle (1) et (2) (l'équation (5) ne servant qu'à calculer le niveau du taux d'intérêt r qui découle du niveau de production y choisi).

Considérons maintenant le cas opposé où il n'y a pas d'incertitude sur le coefficient a_y de la relation de Phillips (4) mais où seul le coefficient a_r, qui concerne l'effet du taux d'intérêt sur la production, est incertain. On montre facilement (voir annexe F) que ce cas peut se ramener au modèle utilisé $\{(1), (2)\}$ en prenant comme variable de contrôle u le taux d'intérêt r, et

---

[13] Pour interpréter une telle équation statique dans le cadre de la nouvelle macroéconomie keynésienne, on pourrait par exemple se référer au modèle de Clarida et al. (1999), qui peut être dérivé d'un modèle avec fondements microécomomiques, et qui est purement "forward looking". Dans ce modèle on a dans l'équation (4) un terme supplémentaire en $E\pi_{+1}$, et dans l'équation (5) un terme supplémentaire en Ey_{+1}, où E désigne l'espérance conditionnelle à l'information disponible au cours de la période présente, et où l'indice "+1" désigne la période future. Avec une politique monétaire discrétionnaire, et en supposant que les chocs de la période présente sont purement transitoires et donc que les espérances des chocs anticipés sont nuls, on devrait avoir $E\pi_{+1} = Ey_{+1} = 0$, ce qui conduirait alors aux équations statiques (4) et (5).

[14] Comme la banque centrale contrôle en fait le taux d'intérêt nominal, cela suppose qu'il n'y a pas d'incertitude sur le taux d'inflation anticipé par le secteur privé.

[15] Si les paramètres a_y et a_r sont tous deux incertains, on ne peut se ramener directement au modèle de base {(1), (2)}. L'annexe F donne le résultat dans le cas de l'approche bayésienne. Celui-ci indique que l'incertitude sur chacun des deux paramètres contribue à réduire l'activisme de la politique.

[16] L'hypothèse que la production est contrôlable dans un modèle constitué d'une équation (dynamique) de courbe de Phillips est faite par exemple par Svensson (2000).

en prenant comme variable cible x l'écart $y-\hat{y}^c$ de la production y à sa valeur optimale en situation de certitude $\hat{y}^c$. L'équation (1) du modèle est alors obtenue à partir de la courbe IS (5), et le poids accordé à la stabilisation de la variable de contrôle est dans ce cas égal à zéro. Autrement dit, on prend $u = r$, $x = y-\hat{y}^c$, $\alpha = -a_r$, $\eta = \nu_2-\hat{y}^c$, $\psi = 0$. On a dans ce cas $\psi = 0$ parce que l'on a supposé qu'il n'y a pas de coût lié à la variation du taux d'intérêt. Si toutefois, comme cela est parfois fait dans la littérature, on ajoutait un objectif de taux d'intérêt, que l'on représenterait ici par un terme additionnel φr^2 dans la fonction de perte (6), la valeur correspondante de ψ ne serait plus nulle.

2.3 Approche bayésienne

D'après (3), et en utilisant l'égalité $E\alpha^2 = (E\alpha)^2+\sigma_\alpha^2$, où σ_α^2 est égal à la variance de α, on peut écrire :

$$E\Omega = [(E\alpha)^2+\sigma_\alpha^2+\psi]u^2+2\eta(E\alpha)u+\eta^2 \tag{7}$$

Comme on considère des lois de probabilité centrées autour de α_0, donc vérifiant $E\alpha = \alpha_0$, la minimisation de $E\Omega$ donne alors la politique bayésienne $\hat{u}^B$, où l'indice B signifie "bayésien" :

$$\hat{u}^B(\sigma_\alpha^2) = -\frac{\alpha_0\eta}{\alpha_0^2+\sigma_\alpha^2+\psi} \tag{8}$$

D'après (8), $|\hat{u}^B(\sigma_\alpha^2)|$ est une fonction décroissante de σ_α^2, ce qui correspond au résultat de Brainard (1967) selon lequel l'incertitude sur le paramètre α rend la politique moins activiste.

2.4 Approche du minimax : politique robuste

Le décideur politique résoud le problème $\min_u \max_{P_\alpha} E\Omega$, où P_α est n'importe quelle probabilité de support $[\alpha_0-\gamma, \alpha_0+\gamma]$. Afin de simplifier la présentation, on va sans perte de généralité [17] supposer que l'on a $\alpha_0 > 0$. La solution de ce problème d'optimisation est la politique "robuste". C'est la politique qui minimise l'espérance de la fonction de perte lorsque, pour chaque politique considérée u, on envisage toujours la pire des situations possibles en ce qui concerne l'effet de politique, c'est-à-dire la pire des probabilités P_α en réponse à u.

Pour étudier la politique robuste, il va auparavant être utile de considérer la politique qui serait obtenue si on était certain de la valeur de α (cette

[17] En effet dans le cas $\alpha_0 < 0$, il suffit de poser $u' = -u$ et $\alpha_0' = -\alpha_0$. Le modèle avec u' et α_0' est alors identique à celui avec u et α_0, et on a $\alpha_0' > 0$. Remarquons que comme on a $|u'| = |u|$, l'activisme des politiques u et u' est le même.

valeur pouvant ici être différente de α_0). Utilisant (3), la minimisation de Ω donne la politique optimale :

$$\hat{u}(\alpha) = -\frac{\alpha\eta}{\alpha^2 + \psi} \tag{9}$$

On peut remarquer, et c'est un point qui s'avèrera important pour l'étude de la politique robuste, que $|\alpha|$ a un effet de signe ambigu sur $|\hat{u}(\alpha)|$, ce qui signifie que l'importance de l'effet de la politique en valeur absolue agit de manière ambiguë sur l'activisme de cette politique. Car, en utilisant (9), on obtient que $\frac{d|\hat{u}(\alpha)|}{d|\alpha|}$ est du signe de $\psi - \alpha^2$, et donc que $|\hat{u}(\alpha)|$ est une fonction croissante de $|\alpha|$ dans le cas $\psi > \alpha^2$, et une fonction décroissante de $|\alpha|$ dans la cas $\psi < \alpha^2$. La raison en est que, face à un choc η, deux mécanismes jouent en sens opposés. D'une part, lorsque $|\alpha|$ augmente, c'est à dire lorsque la politique a davantage d'effet sur la variable cible x, il devient possible d'obtenir la même stabilisation de x avec une valeur plus faible de $|u|$, ce qui tend à faire décroître $|u|$. D'autre part, une plus grande valeur de $|\alpha|$, et donc une politique plus efficace, modifie le "trade-off" entre la stabilisation de u et celle de x en faveur de la stabilisation de x puisque celle-ci est plus facile à réaliser et donc moins coûteuse en termes de variation de $|u|$. Il devient donc optimal de stabiliser davantage x, ce qui conduit au contraire à accoître $|u|$. Selon que l'un ou l'autre de ces mécanismes l'emporte, le sens du résultat pourra en être modifié. Le rôle de ψ vient de ce qu'il affecte le trade-off et donc influence le deuxième mécanisme évoqué.

On obtient alors le résultat suivant en ce qui concerne la politique robuste :

Proposition 1: *Soit $\hat{u}^R$ la politique robuste :*

i) *dans le cas $\alpha_0 - \gamma > 0$:*

. *si $\psi \geq \psi^* \equiv (\alpha_0 - \gamma)\gamma$, alors on a $\hat{u}^R = \hat{u}(\alpha_0 - \gamma)$, où $\hat{u}(\alpha)$ est donné par* (9) ;

. *si $\psi \leq \psi^*$, alors on a $\hat{u}^R = -\frac{\eta}{\alpha_0}$.*

ii) *dans le cas $\alpha_0 - \gamma \leq 0$, on toujours $\hat{u}^R = 0$.*

La démonstration est donnée dans l'annexe A.

La partie (i) de la proposition concerne le cas $\alpha_0 - \gamma > 0$, où le coefficient α reste toujours de même signe (c'est à dire positif car, rappelons le, on a sans perte de généralité supposé que l'on a $\alpha_0 > 0$). Si on a $\psi \geq \psi^*$, la politique robuste est la même que la politique qui serait optimale s'il était certain que α était égal à $\alpha_0 - \gamma$, où l'effet de la politique est le plus faible possible en valeur absolue [18]. Mais si on a $\psi \leq \psi^*$, la politique robuste prend

[18] Comme on a pris $\alpha_0 > 0$, l'ajout "en valeur absolue" n'est pas nécessaire, mais il le deviendrait si on avait $\alpha_0 < 0$, car le cas présent où α ne change pas de signe dans l'intervalle $[\alpha_0 - \gamma, \alpha_0 + \gamma]$ correspondrait alors au cas $\alpha_0 + \gamma < 0$ où il reste toujours négatif, et la politique robuste serait dans ce cas égale à $\hat{u}(\alpha_0 + \gamma)$, ce qui correspondrait à la valeur de α la plus faible en valeur absolue.

la valeur $(-\frac{\eta}{\alpha_0})$ indépendante de ψ et de γ[19]. On peut remarquer que pour $\psi \leq \psi^*$ on a l'inégalité $\left|-\frac{\eta}{\alpha_0}\right| \leq \left|\hat{u}(\alpha_0 - \gamma)\right|$, et donc que dans ce cas la politique robuste est moins activiste que celle où il serait certain que α est égal à sa valeur minimale $\alpha_0 - \gamma$. En effet, la valeur $u = -\frac{\eta}{\alpha_0}$ correspond à la situation limite qui rend le décideur indifférent entre les deux valeurs extrêmes $\alpha_0 - \gamma$ et $\alpha_0 + \gamma$. Avec une politique plus activiste vérifiant $|u| > \frac{|\eta|}{\alpha_0}$, la pire des situations ne serait donc plus $\alpha = \alpha_0 - \gamma$ mais celle où on aurait $\alpha = \alpha_0 + \gamma$, où au contraire la politique a le plus d'effet en valeur absolue. Car le principal inconvénient consisterait alors en une politique trop active, le problème n'étant plus que x soit en deçà de sa valeur désirée par insuffisance de stabilisation, mais au delà (en changeant de signe) par excès. C'est pourquoi les valeurs de $\hat{u}(\alpha_0 - \gamma)$ supérieures à $\frac{|\eta|}{\alpha_0}$ en valeur absolue ne peuvent pas être des solutions[20].

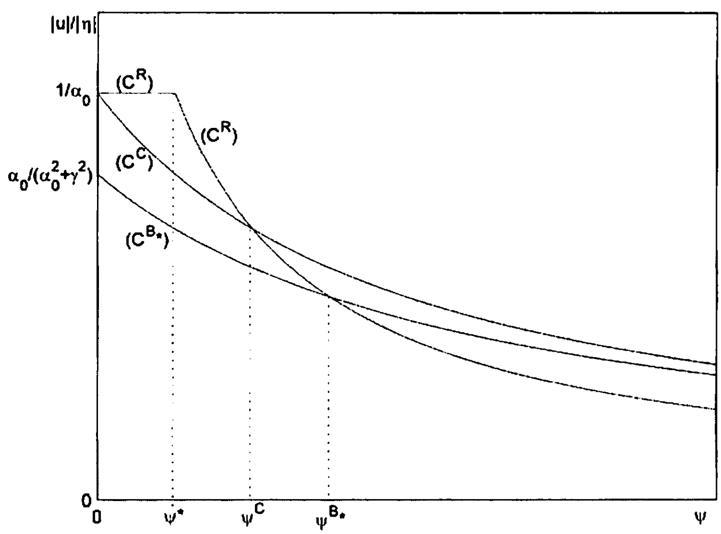

Figure 1 : $|u|/|\eta|$ *en fonction de* ψ *dans le cas* $\gamma < \alpha_0$

19 Des résultats similaires avaient été obtenu par Svensson (2000) dans le cadre d'une équation dynamique de courbe de Phillips. Toutefois, comme Svensson avait supposé que l'effet de la politique ne changeait pas de signe, l'équivalent de la partie (ii) de la proposition 1 n'apparaît pas dans Svensson (2000).

20 Il en résulte que dans le cas $\psi < \psi^*$ la politique robuste $u = -\frac{\eta}{\alpha_0}$ ne peut être obtenue comme une politique optimale $\hat{u}(\alpha)$ pour une valeur donnée (et certaine) de α. Si on considère le jeu à deux joueurs à somme nulle contre une nature malveillante qui est associé au problème de minimax, cela signifie qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash de ce jeu qui soit en "stratégies pures" pour la nature, c'est à dire où celle-ci choisirait la valeur de α. Toutefois, comme on a supposé, dans la lignée de Gilboa et Schmeidler (1989), que la nature peut choisir des "stratégies mixtes", puisque le choix concerne les probabilités P_α sur α, on peut voir qu'il existe en fait un équilibre de Nash du jeu associé, la politique robuste $u = -\frac{\eta}{\alpha_0}$ correspondant alors à une probabilité qui serait une somme pondérée des deux probabilités extrêmes concentrées en $\alpha_0 - \gamma$ et $\alpha_0 + \gamma$. On donne dans l'annexe B l'expression plus précise de cette probabilité d'équilibre.
Toutefois, dans les modèles avec incertitude sur les délais d'action de la politique qui seront considérés dans les sections suivantes, on montrera qu'il existe un équilibre de Nash en stratégies pures du jeu correspondant, et c'est en fait de cette manière que l'on déterminera les politique robustes (voir annexes D et E).

Ces résultats apparaissent sur la figure 1, où la courbe (C^R) représente, dans le cas $\alpha_0 - \gamma > 0$, la manière dont $\frac{|\hat{u}^R|}{|\eta|}$, qui mesure l'activisme de la politique, varie en fonction de ψ, pour des valeurs données [21] de α_0 et γ. D'après la proposition 1, pour $\psi \geq \psi^*$, la courbe (C^R) est identique à la courbe représentative de la fonction $\frac{|\hat{u}(\alpha_0 - \gamma)|}{|\eta|}$ (qui est une fonction décroissante de ψ) ; et, pour $\psi \leq \psi^*$, la courbe (C^R) est obtenue en tronquant le haut de cette courbe représentative par la droite horizontale d'ordonnée égale à $\frac{1}{\alpha_0}$ (puisque dans ce cas on a $\frac{|\hat{u}^R|}{|\eta|} = \frac{1}{\alpha_0}$).

La partie (ii) de la proposition 1 indique que si on a $\alpha_0 - \gamma \leq 0$, auquel cas il devient possible que la politique n'ait aucun effet $(\alpha = 0)$ ou même qu'elle ait un effet pervers $(\alpha < 0)$, c'est à dire de sens opposé à celui de la valeur de référence α_0, on a toujours $\hat{u}^R = 0$, et donc un inactivisme complet. Pareillement au cas $\alpha_0 - \gamma > 0$ et $\psi \geq \psi^*$, la politique robuste est ici aussi la politique qui serait optimale dans la situation où la politique a son effet le plus faible en valeur absolue. Car, dans le cas présent où α appartient à $[\alpha_0 - \gamma, \alpha_0 + \gamma]$ avec $\alpha_0 - \gamma \leq 0$, la plus faible valeur de α en valeur absolue est $\alpha = 0$, et on a $\hat{u}(0) = 0$.

Dans le cas bayésien on a vu que, conformément au résultat de Brainard, plus l'incertitude est grande, c'est à dire selon cette approche plus σ_α^2 est grand, moins la politique est activiste. On peut voir que pour la politique robuste il n'en est pas toujours ainsi. En effet, si on considère la manière dont $|\hat{u}^R|$ varie avec le paramètre γ, qui dans ce cas représente le montant de l'incertitude, on obtient le résultat que ce n'est pas toujours une fonction décroissante de γ. Tout d'abord, au delà du seuil α_0 la politique robuste ne varie plus avec γ puisque dans le cas $\gamma \geq \alpha_0$, d'après la proposition 1, on toujours une politique totalement inactive $\hat{u}^R = 0$. De même, pour $\gamma < \alpha_0$ et quand on a $\psi \leq \psi^*$, on a vu que $|\hat{u}^R|$ ne varie pas avec γ puisqu'il est toujours égal à $\frac{|\eta|}{\alpha_0}$.

Mais surtout, dans le cas $\gamma < \alpha_0$ et $\psi \geq \psi^*$, il se peut même que $|\hat{u}^R|$ soit une fonction strictement croissante de γ. La raison en est qu'en situation de certitude, comme on l'a indiqué précédemment, $|\hat{u}(\alpha)|$ n'est pas toujours une fonction croissante de α. Or, comme dans ce cas on a $\hat{u}^R = \hat{u}(\alpha_0 - \gamma)$, ceci implique que $|\hat{u}^R|$ n'est pas toujours une fonction décroissante de γ. En effet, comme la pire des situations est alors celle où l'effet de la politique est à sa plus faible valeur $\alpha_0 - \gamma$, et comme cette plus faible valeur diminue quand l'incertitude γ augmente, ceci n'entraine un moindre activisme que si un moindre effet de la politique conduit, en situation de certitude, aussi à moins d'activisme. Or ce n'est pas toujours vrai. En effet, on a souligné précédemment que $|\hat{u}(\alpha)|$ est une fonction croissante de α quand on a $\psi \geq \alpha^2$, et décroissante de α quand on a $\psi \leq \alpha^2$. Ceci implique que $|\hat{u}^R|$ est une fonction décroissante de γ quand on a $\psi \geq (\alpha_0 - \gamma)^2$ mais que c'est au contraire une fonction croissante de γ quand on a $\psi \leq (\alpha_0 - \gamma)^2$.

---

[21] Pour tracer la courbe 1, on a pris arbitrairement $\alpha_0 = 1$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. Toute valeur satisfaisant $0 < \gamma < \alpha_0$, donnerait les mêmes tracés et résultats qualitatifs.

Ces remarques amènent à distinguer trois cas, qui sont représentés par les courbes (C^R) dans les figures 2 , 3 et 4 respectivement [22], où (C^R) est ici la courbe représentative de $\frac{|\hat{u}^R|}{|\eta|}$ en fonction de γ.

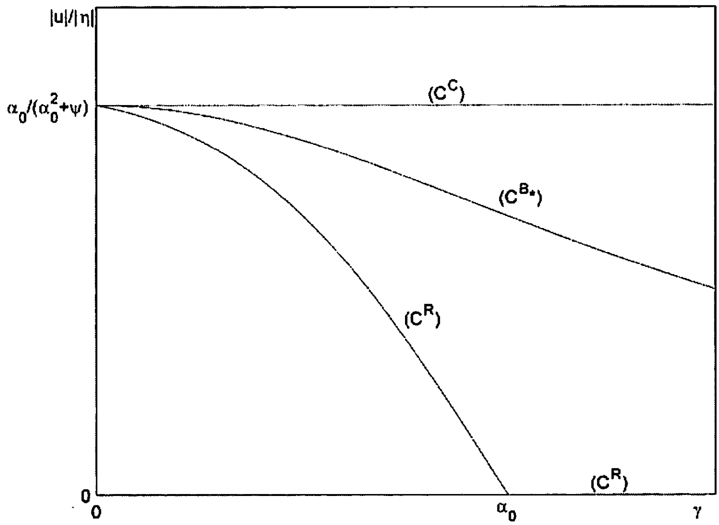

Figure 2 : $|u|/|\eta|$ *en fonction de* γ *dans le cas* $\psi \geq \alpha_0^2$

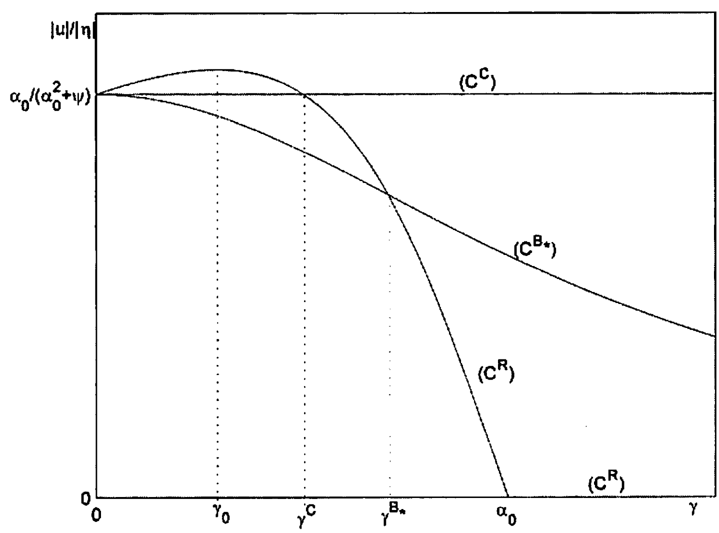

Figure 3 : $|u|/|\eta|$ *en fonction de* γ *dans le cas* $\alpha_0^2/4 \leq \psi < \alpha_0^2$

[22] Pour tracer ces figures on a pris arbitrairement $\alpha_0 = 1$ et $\psi = 1.5$, $\psi = 0.5$ et $\psi = 0.2$ pour les figures 2, 3 et 4 respectivement. N'importe quelles autres valeurs vérifiant dans chaque cas les inégalités requises donneraient les mêmes tracés et résultats qualitatifs.

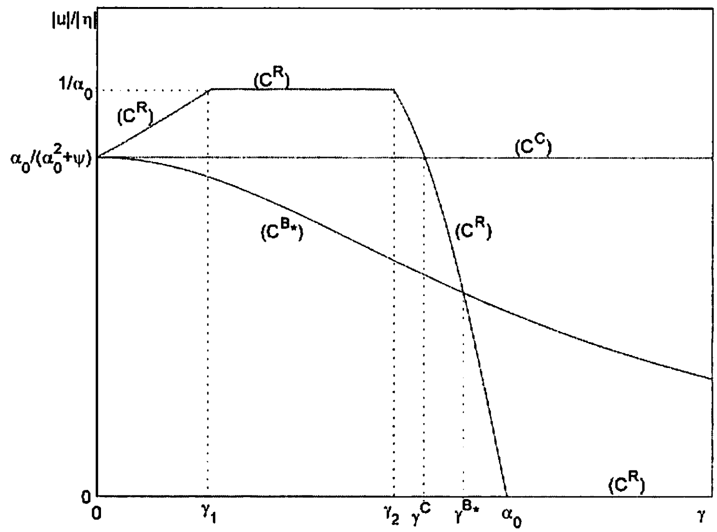

Figure 4 : $|u|/|\eta|$ *en fonction de* γ *dans le cas* $0<\psi<\alpha_0^2/4$

Dans toutes ces figures on a $\frac{|\hat{u}^R|}{|\eta|} = 0$ pour $\gamma \geq \alpha_0$, de sorte que (C^R) est alors confondu avec l'axe des abcisses. Quand on a $\gamma < \alpha_0$ trois cas surgissent. Le premier, représenté sur la figure 2, correspond *à* $\psi \geq \alpha_0^2$. Dans ce cas $\frac{|\hat{u}^R|}{|\eta|}$ est toujours une fonction décroissante de γ puisque, quel que soit γ, on a alors $\psi \geq (\alpha_0 - \gamma)^2$. Les deuxièmes et troisièmes cas, pour lesquelles on a $\psi < \alpha_0^2$, se distinguent entre eux par le fait qu'il y a ou non une portion tronquée dans la courbe (C^R). Dans le deuxième cas, représenté sur la figure 3, une telle portion tronquée n'existe pas car on a $\psi \geq \psi^* \equiv (\alpha_0 - \gamma)\,\gamma$ pour tout γ, ce qui se produit si et seulement si ψ est supérieur ou égal au maximum de la fonction $h(\gamma) \equiv (\alpha_0 - \gamma)\gamma$, ce qui donne $\psi \geq \frac{\alpha_0^2}{4}$. Le deuxième cas se produit donc quand on a $\frac{\alpha_0^2}{4} \leq \Psi < \alpha_0^2$. Dans ce cas on a $\hat{u}^R = \hat{u}(\alpha_0 - \psi)$; et $\frac{|\hat{u}^R|}{|\eta|}$ est une fonction croissante de γ tant que l'on a $(\alpha_0 - \gamma)^2 \geq \psi$, c'est à dire $\gamma \leq \gamma_0 \equiv \alpha_0 - \sqrt{\psi}$. Quand l'incertitude n'est pas trop élevée, un accroissement de l'incertitude accroît dans ce cas l'activisme de la politique. Pour un niveau plus élevé d'incertitude, lorsque $\gamma_0 \leq \gamma \leq \alpha_0$, la fonction devient décroissante et l'incertitude réduit l'activisme de la politique. Enfin, le troisième cas, représenté sur la figure 4, correspond au cas $0 < \psi < \frac{\alpha_0^2}{4}$, où $\frac{|\hat{u}^R|}{|\eta|}$ peut être égal à $\frac{1}{\alpha_0}$, ce qui revient à tronquer la partie supérieure de la courbe. Qualitativement, cela introduit un intervalle de valeurs $[\gamma_1, \gamma_2]$ de γ pour lequel la politique robuste reste indépendante du niveau d'incertitude γ, l'activisme étant une fonction croissante de l'incertitude pour $0 \leq \gamma \leq \gamma_1$, et une fonction décroissante pour $\gamma_2 \leq \gamma \leq \alpha_0$. On peut résumer ces résultats dans la proposition suivante :

Proposition 2 : *Le signe de* $\frac{\partial|\hat{u}^R|}{\partial\gamma}$ *est ambigu, ce qui signifie qu'une plus grande incertitude peut rendre la politique robuste plus activiste ou moins* *activiste, selon les valeurs des paramètres du modèle. Lorsque l'incertitude est suffisamment élevée, ou quel que soit le degré d'incertitude si on est dans le cas* $\psi \geq \alpha_0^2$, *une plus grande incertitude diminue toujours l'activisme de la politique robuste (du moins tant qu'elle ne devient pas complètement inactive). Toutefois, dans le cas* $\psi < \alpha_0^2$ *et tant que l'incertitude n'est pas trop élevée, l'activisme de la politique robuste augmente quand l'incertitude s'accroît.*

2.5 Comparaison

On va comparer l'activisme de la politique robuste à l'activisme des politiques bayésiennes $\hat{u}^B(\sigma_\alpha^2)$ données par (8) [23]. Remarquons tout d'abord que dans le cas $\alpha_0 - \gamma \leq 0$ où, d'après la proposition 1, on a toujours $\hat{u}^R = 0$, la politique robuste, qui est totalement inactiviste, est nécessairement moins activiste que toute politique bayésienne puisque cette dernière conserve un certain activisme $(\hat{u}^B(\sigma_\alpha^2) \neq 0)$. Le cas moins évident se produit donc quand on a $\alpha_0 - \gamma > 0$. Comme $|\hat{u}^B(\sigma_\alpha^2)|$ est une fonction décroissante de σ_α^2 et que l'on a $0 \leq \sigma_\alpha^2 \leq \gamma^2$ puisque α appartient à l'intervalle $[\alpha_0 - \gamma, \alpha_0 + \gamma]$, on a pour toute politique bayésienne $|\hat{u}^{B*}| \leq |\hat{u}^B(\sigma_\alpha^2)| < |\hat{u}^C|$, où $\hat{u}^C$ est la politique optimale lorsqu'il est certain que α est égal à la valeur du modèle de référence α_0 ; et où $\hat{u}^{B*} \equiv \hat{u}^B(\gamma^2)$ est la politique bayésienne de moindre activisme, où σ_α^2 prend sa valeur maximale γ^2. L'activisme des politiques bayésiennes se situe entre celle de $\hat{u}^{B*}$ et celle de $\hat{u}^C$. On va donc comparer la politique robuste à ces deux cas extrêmes.

Ainsi qu'on vient de le souligner, l'activisme de la politique robuste $\hat{u}^R$ ne varie pas nécessairement de manière monotone avec γ. De ce fait, la comparaison entre l'activisme de $\hat{u}^R$ et de $\hat{u}^C$ va se trouver être ambigu. On obtient le résultat suivant :

Proposition 3 : *Quand, dans le cas* $\alpha_0 - \gamma > 0$, *on compare la politique robuste* $\hat{u}^R$ *à la politique* $\hat{u}^C$, *qui est la politique optimale dans le cas où il serait certain que* α *est égal à sa valeur de référence* α_0, *on obtient* $|\hat{u}^R| < |\hat{u}^C|$ *si* $\psi > \psi^C \equiv \alpha_0(\alpha_0 - \gamma)$, *et* $|\hat{u}^R| > |\hat{u}^C|$ *si* $\psi < \psi^C$ *(et avec égalité si* $\psi = \psi^C$*).*

Il en résulte que l'on a $|\hat{u}^R| < |\hat{u}^C|$ *si et seulement si on a* $\gamma > \gamma^C \equiv \alpha_0(1 - \frac{\psi}{\alpha_0^2})$. *Ceci implique que l'inégalité* $|\hat{u}^R| > |\hat{u}^C|$ *s'obtient dans*

[23] Si on considère le jeu à deux joueurs à somme nulle contre une nature malveillante qui est associé au problème du minimax, on peut montrer (voir annexe B) que ce jeu admet un équilibre de Nash $(\hat{u}^R, \hat{P}^R)$. Cela signifie que la politique robuste $\hat{u}^R$ s'obtient comme politique bayésienne où le décideur a la croyance $\hat{P}^R$; et que $\hat{P}^R$ est la meilleure réponse de la Nature à $\hat{u}^R$, et donc la pire des probabilités pour le décideur politique lorsqu'il choisit $\hat{u}^R$. Toutefois, cette loi de probabilité, qui est déterminée de manière endogène par rapport au problème initial de minimax, et dont l'expression exacte est donnée dans l'annexe B, est biaisée vers un moindre effet de la politique car on peut montrer que pour cette loi de probabilité $\hat{P}^R$ on a l'inégalité $E\alpha \leq \alpha_0$. Les politiques bayésiennes $\hat{u}^R(\sigma_\alpha^2)$ auxquelles on compare cette politique robuste sont quant à elles, tout comme l'est le problème initial de minimax, définies de manière symétrique par rapport à la valeur de référence α_0, et vérifient donc a priori $E\alpha = \alpha_0$.

le cas où on a $\psi < \alpha_0^2$ et $0 < \gamma < \gamma^C$. Cela signifie que si le degré d'incertitude est suffisamment grand, la politique robuste $\hat{u}^R$ est moins activiste que la politique en certitude $\hat{u}^C$. Toutefois, dans le cas $\psi < \alpha_0^2$, et lorsque le degré d'incertitude γ n'est pas trop élevé, c'est au contraire la politique robuste $\hat{u}^R$ qui est plus activiste que la politique en certitude $\hat{u}^C$.

La démonstration est donnée dans l'annexe C.

Ces résultats apparaissent sur les figures 1, 2, 3 et 4, où les courbes (C^R) et (C^C) correspondent aux politiques $\hat{u}^R$ et $\hat{u}^C$ respectivement. Sur la figure 1, qui représente comment $\frac{|u|}{|\eta|}$ varie en fonction de ψ, les courbes (C^R) et (C^C) se coupent au point d'abcisse ψ^C. Sur les figures 2, 3 et 4, qui représentent la manière dont $\frac{|u|}{|\eta|}$ varie en fonction de γ, la courbe (C^C)y est une droite horizontale puisque $|\hat{u}^C|$ ne dépend pas de γ. Sur la figure 2, qui correspond au cas $\psi > \alpha_0^2$, on a toujours la politique robuste moins activiste. Par contre dans les figures 3 et 4 il existe une valeur seuil γ^C de γ pour laquelle la politique robuste est plus activiste en deçà de cette valeur, et moins activiste au delà de celle-ci.

La comparaison entre $\hat{u}^R$ et $\hat{u}^{B*}$ peut être réalisée exactement de la même manière. On obtient le même type de résultats qualitatifs que lorsque l'on compare $\hat{u}^R$ et $\hat{u}^C$, la seule différence concernant les valeurs seuils. On a maintenant la valeur seuil $\psi^{B*} \equiv (\alpha_0 + \gamma)(\alpha_0 - \gamma)$, qui est supérieure à ψ^C, ce qui donne évidemment une condition plus restrictive (qui est $\psi > \psi^{B*}$) pour que la politique robuste $\hat{u}^R$ soit moins activiste que la politique bayésienne $\hat{u}^{B*}$. La valeur seuil correpondante pour γ est alors $\gamma^{B*} \equiv \alpha_0\sqrt{1 - \frac{\psi}{\alpha_0^2}}$, qui est également supérieure à γ^C, de sorte que, dans le cas $\psi < \alpha_0^2$, cela réclame un degré d'incertitude γ plus important pour que la politique robuste soit moins activiste que la politique bayésienne $\hat{u}^{B*}$. Ces résultats apparaissent aussi sur les figures 1 à 4, où dans chacune de ces figures la courbe (C^{B*}) représente la politique bayésienne $\hat{u}^{B*}$.

3 Incertitude sur les délais d'action de la politique

3.1 Modèle

Dans le cadre du modèle statique précédent, avec incertitude sur le paramètre α, l'incertitude portait sur l'effet global de la politique. On va maintenant supposer que cette incertitude ne porte pas sur l'effet gobal mais sur les délais d'action. Ainsi, dans le cadre de la politique monétaire, Friedman (1960) avait exprimé l'idée qu'un des obstacles principaux à une politique monétaire activiste était que, bien que l'on ait une assez bonne connaissance de son effet global à plus ou moins long terme, la manière dont cet effet se répartissait au cours du temps était entaché d'une grande incertitude, les délais d'action de la politique monétaire étant peu connus [24]. On va essayer d'exprimer simplement cette idée en considérant un modèle similaire au modèle précédent mais à plusieurs périodes, où l'effet global au bout de deux périodes futures est connu mais où par contre on est incertain sur la répartition de cet effet au cours des deux périodes. Le modèle est le suivant :

$$x_1 = \alpha_1 u_0 + \eta_1 \tag{10}$$

$$x_2 = \alpha_2 u_0 + \eta_2 \tag{11}$$

$$\Omega_0 = x_1^2 + x_2^2 + 2\,\psi u_0^2 \tag{12}$$

où u_0 est la variable de contrôle à la période 0, x_1 et x_2 les valeurs de la variable x dans les périodes 1 et 2 respectivement, η_1 et η_2 des variables aléatoires représentant des chocs au cours de ces deux périodes, et qui sont supposés connus du décideur politique [25]. Ω_0 est la perte du décideur politique où, pour simplifier, on n'introduit pas de facteur d'escompte entre les périodes [26]. On pose :

$$\alpha_m \equiv \frac{1}{2}\,(\alpha_1 + \alpha_2); \qquad \xi \equiv \frac{1}{2}\,(\alpha_1 - \alpha_2) \tag{13}$$

On va supposer que l'on connait le montant de l'effet gobal $\alpha_1 + \alpha_2$, ou de manière équivalente que l'effet moyen α_m est connu, mais qu'il existe une incertitude quant à la répartition de cet effet au cours des deux périodes, et donc que le paramètre ξ est incertain [27].

24 Friedman (1960) indique : "Alors que le stock de monnaie est systématiquement relié au niveau des prix *en moyenne* [c'est Friedman qui souligne], il y a beaucoup de variation dans la relation sur des courtes périodes de temps..." (p.87). Egalement : "...il y a peu de fondement qui permette de savoir si le délai entre l'action et l'effet sera 4 mois ou 29 mois ou quelque part entre les deux" (p.88). Et il donne en exemple le cas de la deuxième partie des années 1950, où, selon lui, une mauvaise prise en compte de ce délai d'action a contribué à amplifier les fluctuations économiques.

25 Comme dans le cas du modèle statique précédent, si les chocs η_1 et η_2 n'était pas connus, et sous hypothèse d'indépendance avec les paramètres incertains α_1 et α_2, il y aurait équivalence au certain. Le modèle serait donc le même, avec la seule différence qu'il faudrait interpréter les chocs η_1 et η_2 comme les espérances des chocs plutôt que comme les chocs eux-mêmes.

26 Outre la simplification, l'argument habituel du type de celui de Friedman semble ne faire jouer aucun rôle à un tel facteur d'escompte. Remarquons aussi que, comme l'effet de u_0 est sur deux périodes, cela va simplifier les notations de mettre un coefficient 2 devant le paramètre ψ.

27 Une manière plus habituelle de représenter les délais de transmission de la politique monétaire consisterait à prendre un processus partiellement auto-régressif du type $x_t = \rho x_{t-1} + a u_{t-1} + \varepsilon_t$. L'effet de l'incertitude sur a et ρ peut alors être étudié dans un tel cadre (voir Craine (1979) dans un cadre bayésien et Svensson (2000) pour la politique robuste). Toutefois l'analyse de l'effet de l'incertitude de chacun des paramètres a et ρ séparément, ou des deux à la fois, ne traduirait pas véritablement l'idée de Friedman que l'incertitude porte sur les délais d'action mais que l'effet cumulé est connu. Dans le cadre de ce modèle auto-régressif, il faudrait donc rajouter la contrainte que le ratio $\frac{a}{1-\rho}$ est connu puisque ce ratio détermine l'effet cumulé de u_0 sur x. L'analyse de l'incertitude des paramètres a et ρ devrait alors prendre en compte cette contrainte additionnelle. Plutôt que d'adopter cette approche, il nous a paru plus simple, et plus immédiatement lié à l'argument de Friedman (1960), d'utiliser l'approche indiquée dans le texte, qui se focalise directement sur le délai d'action de la politique.

Utilisant (10), (11), (12) et (13) le décideur cherche donc à minimiser la fonction de perte Ω_0 donnée par :

$$\Omega_0 = [(\alpha_m + \xi)u_0 + \eta_m + \eta_d]^2 + [(\alpha_m - \xi)u_0 + \eta_m - \eta_d]^2 + 2\psi u_0^2 \quad (14)$$

où on a posé :

$$\eta_m \equiv \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)\,; \quad \eta_d \equiv \frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2) \quad (15)$$

On va dans un premier temps négliger de considérer les décisions u_1, u_2, u_3,... des périodes suivantes. Ceci permettra de relier plus facilement l'analyse de cette section à celle de la section précédente. A la fin de cette section, on prendra en compte, dans une deuxième analyse, ces politiques futures et leur détermination simultanée avec u_0. On verra que, du moins dans le cas qui sera alors considéré, les résultats qualitatifs restent pour l'essentiel inchangés par rapport à cette analyse simplifiée.

L'incertitude porte sur le paramètre ξ. Afin de prendre en compte l'idée que l'on ignore le profil temporel de l'effet de la politique au cours des deux périodes, on va en outre supposer que les deux périodes jouent un rôle symétrique dans la formulation de cette incertitude, ce qui signifie que la formulation de l'incertitude sur ξ doit se faire de manière symétrique par rapport à zéro. Par conséquent, quand on prend une approche bayésienne la loi de probabilité sur ξ considérée doit être symétrique par rapport à zéro, ce qui implique $E\xi = 0$. Et, quand on adopte l'approche du minimax, l'ensemble des probabilités sur ξ que l'on considère doit être lui-même symétrique par rapport à zéro. Quelle que soit l'approche utilisé, on suppose que l'information sur ξ dont on dispose implique que ξ doit appartenir à l'intervalle $[-\mu, \mu]$, avec $\mu \geq 0$, et donc que toute les lois de probabilité sur ξ considérées doivent être de support $[-\mu, \mu]$.

3.2 Approche bayésienne

Selon l'approche bayésienne le décideur politique a une loi de probabilité d'espérance nulle et de support $[-\mu, \mu]$ sur la variable ξ, qui vérifie donc $E\xi = 0$ *et* $\sigma_\xi^2 \leq \mu^2$, et il minimise $E\Omega_0$. D'après (14) on obtient :

$$E\Omega_0 = 2\{[\alpha_m^2 + (E\xi)^2 + \sigma_\xi^2 + \psi]u_0^2 + 2(\eta_m\alpha_m + \eta_d E\xi)u_0 + \eta_m^2 + \eta_d^2\} \quad (16)$$

Faisant $E\xi = 0$, la minimisation de $E\Omega_0$ donne alors la politique bayésienne :

$$\hat{u}_0^B(\sigma_\xi^2) = -\frac{\eta_m\alpha_m}{\alpha_m^2 + \sigma_\xi^2 + \psi} \quad (17)$$

On obtient donc une expression qui est la même que (8) du modèle statique précédent, avec les valeurs moyennes aux cours des deux périodes α_m et η_m à la place de α_0 et η, et la variance σ_ξ^2 à la place de σ_α^2. Et, de la même manière que précédemment, un accroissement de σ_ξ^2 diminue l'activisme de la politique $\hat{u}_0^B(\sigma_\xi^2)$. On peut en outre remarquer que la variable d'écart η_d entre les chocs des deux périodes n'influence pas la politique bayésienne. Ceci vient de ce que l'on a supposé une complète symétrie entre les deux périodes, ce qui se traduit par $E\xi = 0$. L'effet de la politique étant, en espérance, la même au cours des deux périodes, on ne peut réagir de manière différenciée aux chocs η_1 et η_2 lorsque ceux-ci sont différents.

3.3 Politique robuste

Contrairement à l'approche bayésienne, le décideur politique n'attribue pas une loi de probabilité unique à la variable ξ mais considère un ensemble de lois de probabilités et applique un critère du minimax. On suppose de plus qu'il n'a pas d'information autre que le fait que ξ appartient à l'intervalle $[-\mu, \mu]$ et qu'il considère donc comme possible toute les lois de probabilités de support $[-\mu, \mu]$. Le paramètre μ mesure ainsi le montant de l'incertitude. La politique robuste est celle qui est solution de $\min_u \max_{P_\xi} E\Omega_0$, où P_ξ est n'importe quelle loi de probabilité sur ξ de support $[-\mu, \mu]$. On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 4 : *La politique robuste $\hat{u}_0^R$ est telle que*

(i) dans le cas $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} < \frac{|\alpha_m|}{\mu}$ on a

$$|\hat{u}_0^R| = \frac{|\alpha_m||\eta_m| - \mu|\eta_d|}{\alpha_m^2 + \mu^2 + \psi} \tag{18}$$

avec $\hat{u}_0^R$ *de signe opposé à* $\alpha_m\eta_m$.

On a dans ce cas $\frac{\partial|\hat{u}_0^R|}{\partial\mu} < 0$, ce qui signifie qu'un accroissement de l'incertitude diminue toujours l'activisme de la politique,

(ii) dans le cas $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} \geq \frac{|\alpha_m|}{\mu}$ on a $\hat{u}_0^R = 0$

De plus, dans tous les cas, on a l'inégalité $|\hat{u}_0^R| \leq |\hat{u}_0^B(\sigma_\xi^2)|$. La politique robuste $\hat{u}_0^R$ est donc toujours moins activiste que la politique bayésienne $\hat{u}_0^B$.

La démonstration est donnée dans l'annexe D.

La partie (ii) du résultat indique que si le ratio $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|}$ est suffisamment élevé la politique robuste est nulle. Cela signifie que si l'écart entre les chocs est suffisamment grand en valeur absolue par rapport à leur valeur moyenne, la politique devient complètement inactiviste. On retrouve alors dans sa forme extrême la règle de Friedman (1960) selon laquelle l'incertitude sur les délais d'action de la politique conduit à exclure toute politique de stabilisation, résultat que l'on ne peut obtenir avec l'approche bayésienne. Un accroissement de l'incertitude, qui se traduit par une valeur plus élevé du paramètre μ réduit la valeur seuil $\frac{|\alpha_m|}{\mu}$ et par conséquent augmente les possibilités d'avoir une politique complètement inactiviste. Un effet en moyenne plus important de la politique, qui se traduit par une valeur plus élevée de α_m, accroît au contraire ce seuil et est donc favorable à une politique de stabilisation.

On peut remarquer que pour que l'on ait une politique complètement inactiviste il faut que l'une ou l'autre des deux conditions (a) ou (b) suivantes soit vérifiée : (a) que les chocs des deux périodes η_1 et η_2 soient de signes opposés, ou que l'un des deux chocs soit nul ; (b) que les effets de la politique monétaire au cours des deux périodes puissent être de signes opposés, ou que l'effet au cours d'une période puisse être nul. En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait $|\eta_d| < |\eta_m|$ et $\mu < |\alpha_m|$, ce qui impliquerait $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} < 1 < \frac{|\alpha_m|}{\mu}$, et donc que l'inégalité de (ii) ne serait pas vérifiée. Remarquons toutefois que chacune de ces conditions (a) ou (b) n'est pas à elle seule suffisante. La vérification des deux conditions (a) et (b) à la fois est certes suffisante pour qu'il y ait inactivisme (car on a alors $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} \geq 1 \geq \frac{|\alpha_m|}{\mu}$), mais il n'est pas nécessaire qu'elles soient toutes deux vérifiées pour qu'il y ait inactivisme.

Dans le cas où, au contraire, on a $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} < \frac{|\alpha_m|}{\mu}$, la partie (i) de la proposition 4 indique que la politique robuste n'est pas nulle et qu'on a $\frac{\partial |u_0^R|}{\partial \mu} < 0$. Il y a deux raisons pour lesquelles un accroissement de l'incertitude diminue toujours l'activisme de la politique robuste. En effet, la politique robuste correspond à la politique qui serait optimale dans la pire des situations. Or, en premier lieu, lorsque les chocs aux deux périodes sont différents (et que l'on est dans le cas (i)), la pire des situations est, comme on le montre dans l'annexe D, toujours celle où la politique a un effet en valeur absolue moindre précisément au cours de la période où le choc est le plus important en valeur absolue. Ceci contrarie les possibilités de stabilisation et réduit l'activisme de cette politique, et ce d'autant plus que cette différence d'effets est élevée et par conséquent que l'incertitude est grande ; et aussi d'autant plus que l'écart entre les chocs est important en valeur absolue. Ceci est reflété par la présence du terme $(-\mu\,|\eta_d|)$ au numérateur de l'expression donnée par (18). En second lieu, même quand les chocs sont les mêmes, un accroissement de l'incertitude rend la politique robuste moins activiste. Car, dans ce cas (voir l'annexe D), la pire des situations survient quand il y a le plus grand écart en valeur absolue entre les effets de la politique au cours des deux périodes (et où donc ξ est indifféremment égal à μ ou $-\mu$). L'une des variables est alors trop stabilisée et l'autre ne l'est pas assez, et le coût additionnel qui en résulte implique également une moindre utilisation de la politique de stabilisation. Ceci apparaît à travers de la présence du terme μ^2 au dénominateur dans (18). On peut remarquer que le mécanisme qui, dans le cas analysé précédemment d'une incertitude sur l'effet global, pouvait conduire à davantage d'activisme, n'agit pas ici. Car, accroître $|u_0|$ afin de compenser le plus faible effet de la politique sur la variable cible au cours d'une période, a maintenant le coût additionnel de déstabiliser davantage la variable cible au cours de l'autre période, ce qui élimine alors tout gain possible à agir de la sorte.

La proposition 4 indique aussi que la politique robuste est moins activiste que la politique bayésienne. Il y a deux raisons à cela, qui correspondent aux deux types de raisons que l'on vient de donner, pour lesquelles un degré d'incertitude plus élevé conduit à une politique robuste moins activiste. Tout d'abord, alors que la politique robuste est d'autant moins activiste que la différence des chocs $|\eta_d|$ est grande, la politique correspondant à l'approche bayésienne est indépendante de cet écart $|\eta_d|$. Par conséquent, plus l'écart en valeur absolue $|\eta_d|$ entre les chocs est grand, plus la différence d'activisme entre la politique robuste et la politique bayésienne est importante. Ensuite, même dans le cas où les chocs sont les mêmes (cas $\eta_d = 0$), la politique robuste est moins activiste que la politique bayésienne. Car, comme on l'a indiqué, dans ce cas la politique robuste réagit à la pire des situations, qui est celle où il y a le plus grand écart possible, égal à μ en valeur absolue, entre les effets de la politique au cours des deux périodes. En revanche, la politique bayésienne ne prend quant à elle en compte, comme écart entre les effets de la politique au cours des deux périodes, que l'écart quadratique moyen σ_ξ (formellement on a au dénominateur dans (18) le terme μ^2, alors que dans (17) on a le terme σ_ξ^2, avec $\sigma_\xi^2 \leq \mu^2$). Pour ces deux raisons, ce n'est donc (lorsque $\mu \neq 0$) que dans le cas très particulier où on a à la fois $\eta_d = 0$ et $\sigma_\xi^2 = \mu$, que la politique robuste devient identique à la politique bayésienne. Dans les autres cas, la politique robuste est toujours strictement moins activiste que la politique bayésienne.

Ceci apparaît sur la figure 5 où on a tracé [28] les courbes (C_0^R), (C_0^{B*}) et (C_0^C), représentant respectivement l'évolution de $\frac{|\hat{u}_0^R|}{|\eta_m|}$, $\frac{|\hat{u}_0^{B*}|}{|\eta_m|}$ et $\frac{|\hat{u}_0^C|}{|\eta_m|}$ en fonction de $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|}$, où comme précédemment on définit $\hat{u}_0^{B*}$ comme la politique bayésienne de variance maximale (avec $\sigma_\xi^2 = \mu^2$), et donc d'activisme minimal ; et $\hat{u}_0^C$ comme celle de variance nulle (c'est à dire la politique optimale en certitude), et donc d'activisme maximal. Les courbes (C_0^{B*}) et (C_0^C) sont des droites horizontales puisque les politiques correspondantes sont indépendantes de η_d. Une politique bayésienne quelconque $\hat{u}_0^B(\sigma_\xi^2)$ est représentée par une droite horizontale située entre (C_0^{B*}) et (C_0^C). Tant que $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|}$ est en dessous la valeur seuil $\frac{|\alpha_m|}{\mu}$, la courbe (C_0^R) est une droite décroissante, de même ordonnée à l'origine que (C_0^{B*}) ; puis, lorsque $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|}$ est supérieur à la valeur seuil $\frac{|\alpha_m|}{\mu}$, elle devient identique à l'axe des abcisses puisqu'on a dans ce cas $\hat{u}_0^R = 0$.

[28] Pour tracer ces courbes on a pris arbitrairement $\alpha_m = 1$, $\psi = 0.5$ et $\mu = 0.75$. Toutes autres valeurs donneraient les mêmes tracés et résultats qualitatifs.

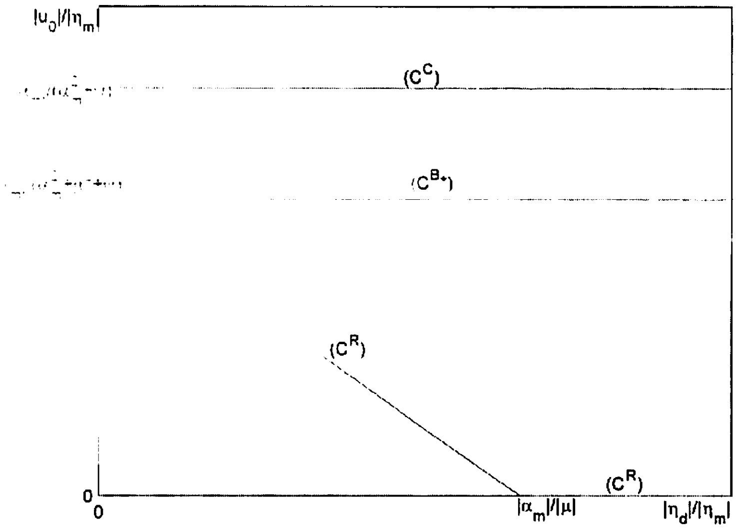

Figure 5 : $|u_0|/|\eta_m|$ *en fonction de* $|\eta_d|/|\eta_m|$

3.4 Prise en compte des politiques futures

On va maintenant prendre en compte les politiques futures u_1, u_2, ... et les considérer comme endogènes. Le choix du décideur va donc porter sur l'ensemble des politiques $(u_0, u_1, u_2, ...)$. Toutefois, afin de simplifier l'analyse on va considérer le cas particulier d'un choc transitoire $\eta_1 \neq 0$ de la période 1, les chocs futurs étant nuls : on a $\eta_t = 0$ pour $t \geq 2$. Explicitant les politiques futures u_1, u_2, ... dans le modèle de la section précédente on obtient le modèle suivant :

$$x_1 = \alpha_1 u_0 + \eta_1 \tag{19}$$

$$x_2 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_0 \tag{20}$$

$$x_3 = \alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_1, \ldots \tag{21}$$

et ainsi de suite, de sorte que l'on a

$$x_t = \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}; \quad t \geq 2 \tag{22}$$

La fonction de perte que minimise le décideur politique est

$$\Omega_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t (x_t^2 + 2\psi u_{t-1}^2) \tag{23}$$

où β est le facteur d'actualisation $(0 < \beta < 1)$. Comme précédemment on prendra le cas limite où β tend vers 1. On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 5 : *A la période 0, la politique bayésienne est :*

$$\hat{u}_0^B = -\frac{\alpha_m(\frac{\eta_1}{2})}{\alpha_m^2 + \sigma_\xi^2 + \psi + \frac{1}{2}\,(\alpha_m^2 - \sigma_\xi^2)\lambda^B} \tag{24}$$

où λ^B *est un coefficient qui dépend des paramètres du modèle et de* σ_ξ^2, *et qui vérifie* $|\lambda^B| < 1$.

A la période 0, dans le cas $\mu < |\alpha_m|$ *on a pour la politique robuste :*

$$|\hat{u}_0^R| = \frac{(|\alpha_m| - \mu)\left|\frac{\eta_1}{2}\right|}{\alpha_m^2 + \mu^2 + \psi + \frac{1}{2}(\alpha_m^2 - \mu^2)\lambda^R} \tag{25}$$

avec u_0^R de signe opposé à $\alpha_m\eta_1$, et où λ^R *est un coefficient qui dépend des paramètres du modèle et de* μ, *et qui vérifie* $|\lambda^R| < 1$.

Et dans le cas $\mu \geq |\alpha_m|$, *on a* $\hat{u}_0^R = 0$.

Aux autres périodes les politiques bayésiennes et robustes sont données par :

$$\hat{u}_t^B = (\lambda^B)^t \hat{u}_0^B; \quad \hat{u}_t^R = (\lambda^R)^t \hat{u}_0^R; \quad t \geq 1 \tag{26}$$

On a $\frac{d|\hat{u}_0^B|}{d\sigma_\xi^2} < 0$, *ce qui signifie qu'un accroissement de la variance* σ_ξ^2 *de* ξ *diminue l'activisme de la politique bayésienne* $\hat{u}_0^B$ *à la période 0. De plus, dans le cas* $\sigma_\xi < |\alpha_m|$ *(qui est nécessairement vérifié si on a* $\mu < |\alpha_m|$*), c'est également vrai à toutes les périodes car on a dans ce cas aussi* $\frac{d|\lambda^B|}{d\sigma_\xi^2} < 0$, *et donc a fortiori* $\frac{d|\hat{u}_t^B|}{d\sigma_\xi^2} < 0$ *pour tout t.*

Lorsque la politique $\hat{u}_0^R$ *n'est pas nulle, c'est à dire dans le cas* $\mu < |\alpha_m|$, *alors on a* $\frac{d|\hat{u}_0^R|}{d\mu} < 0$ *et* $\frac{d|\lambda^R|}{d\mu} < 0$, *et donc aussi* $\frac{d|\hat{u}_t^R|}{d\mu} < 0$ *pour tout t. Un accroissement de l'incertitude diminue donc l'activisme de la politique robuste à toutes les périodes.*

La politique robuste est toujours moins activiste que la politique bayésienne : on a $|\hat{u}_0^R| < |\hat{u}_0^B|$ *et* $|\hat{u}_t^R| \leq |\hat{u}_t^B|$ *pour tout t ; et dans le cas* $\mu < |\alpha_m|$, *on a aussi* $|\lambda^R| < |\lambda^B|$ *et donc l'inégalité stricte* $|\hat{u}_t^R| < |\hat{u}_t^B|$ *pour tout t.*

La démonstration est donnée dans l'annexe E.

La proposition 5 montre que, du moins dans le cas considéré d'un choc transitoire, la prise en compte des politiques futures et de leur endogénéité ne modifie pas essentiellement les résultat obtenus. En fait, si on compare les expressions donnant les politiques optimales à la période 0 qui sont obtenues ici à celles qui étaient obtenues dans l'analyse simplifiée précédente, la seule différence concerne le dénominateur où on a le terme supplémentaire $\frac{1}{2}(\alpha_m^2 - \sigma_\xi^2)\lambda^B$ ou $\frac{1}{2}(\alpha_m^2 - \mu^2)\lambda^R$. En effet les numérateurs sont les mêmes puisque, comme on a pris $\eta_2 = 0$, on a $\eta_m = \eta_d = \frac{\eta_1}{2}$. Les conditions des propositions 4 et 5 pour avoir $\hat{u}_0^R = 0$ sont aussi les mêmes puisque $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} = 1$. Le terme additionnel au dénominateur ne modifie donc pas qualitativement les résultats. De plus, comme les coefficients $|\lambda^B|$ et $|\lambda^R|$, qui dépendent des paramètres du modèle, ont aussi des propriétés semblables à $|\hat{u}_0^B|$ et

$|\hat{u}_0^R|$ dans le cas $\mu<|\alpha_m|$, il en résulte qu'a fortiori $|\hat{u}_t^B|$ et $|\hat{u}_t^R|$ pour les périodes ultérieures ont les mêmes propriétés dans ce cas [29].

4 Conclusion

On a considéré deux types d'incertitude sur l'effet de la politique économique. Le premier concerne le montant global de cet effet, et le deuxième ses délais d'action. Dans les deux cas, il existe dans la littérature des travaux classiques de référence indiquant que l'activisme de la politique devrait en être réduit : Brainard (1967), à partir d'une approche bayésienne, dans le cas d'une incertitude sur l'effet global ; et Friedman (1960), au sujet de la politique monétaire, de manière non formalisée et à partir de travaux empiriques, dans le cas d'incertitude sur les délais d'action. On a cité dans l'introduction un commentaire de Bean (1998) suggérant qu'en fait Brainard pouvait être une manière formelle de traiter l'intuition de Friedman. On a montré ici que lorsqu'on prend une approche bayésienne, il n'y a effectivement pas de différence majeure entre les deux types d'incertitude considérés. Dans les deux cas, et de manière assez semblable, une plus grande incertitude diminue l'activisme de la politique optimale.

Toutefois, quand on adopte une approche de type minimax, où la politique optimale doit être robuste par rapport à un ensemble de probabilités possibles portant sur le paramètre considéré, les deux types d'incertitude ne conduisent plus aux mêmes résultats. Dans le cas d'une incertitude sur l'effet global de la politique, un accroissement de l'incertitude a un effet ambigu sur l'activisme de la politique robuste. La raison en est la suivante. Pour calculer la politique robuste dans les cas pertinents pour la question considérée, il faut envisager la pire des situations possibles. Or on montre que celle-ci s'obtient dans la situation où l'effet de la politique est le plus faible en valeur absolue. Il existe alors deux mécanismes jouant en sens opposés sur l'activisme de la politique. D'une part, ce faible effet amène à vouloir accroître (en valeur absolue) la variable de contrôle afin de compenser ce plus faible effet sur la variable cible, ce qui conduit à davantage d'activisme. D'autre part, le "trade-off" entre la stabilisation de la variable cible et la stabilisa-

[29] Le cas $\mu\geq|\alpha_m|$ diffère quelque peu en ce qui concerne l'évolution de $|\lambda^B|$ et $|\lambda^R|$ en fonction de l'incertitude. Car dans ce cas on obtient que, contrairement au cas $\mu<|\alpha_m|$, on a $\frac{d|\lambda^B|}{d\sigma_\xi^2}>0$ et $\frac{d|\lambda^R|}{d\mu}>0$. Par conséquent, même si les politiques à la date 0 sont d'autant moins activistes que l'incertitude est grande, ce n'est plus nécessairement vrai pour les politiques futures. En effet, il se peut que dans ce cas les coefficients α_1 et α_2 des deux périodes soient de signes opposées. Or les politiques futures ont pour charge de partiellement neutraliser les effets néfastes de $|u_0|$ à la période 2 (puisqu'il n'y a aucun choc anticipé à cette période). Un changement du sens de l'effet de la politique amène ainsi à changer le signe des politiques futures u_t, ce qui implique une variation non monotone de $|u_t|$ en fonction de l'incertitude. Pour la politique robuste, ceci est toutefois sans conséquences puisque de toute manière on a $\hat{u}_0^R=0$ et donc aussi $\hat{u}_t^R=0$ à toutes les périodes dans le cas $\mu\geq|\alpha_m|$.

tion de la variable de contrôle en est modifié, et devient plus défavorable à la stabilisation de la variable cible, ce qui tend au contraire à rendre la politique moins activiste. Selon que l'un ou l'autre de ces deux mécanismes l'emporte, ce qui dépend des paramètres du modèle, l'activisme de la politique robuste en est augmenté ou diminué.

Dans le cas d'une incertitude sur les délais d'action de la politique, on obtient au contraire le résultat qu'une plus grande incertitude diminue toujours l'activisme de la politique robuste (sauf évidemment dans le cas où elle est déjà devenue complètement inactive). En effet, lorsque les chocs sont différents aux deux périodes, la pire des situations, qui est celle prise en compte par la politique robuste, survient lorsque la politique a le moins d'effet au cours de la période où le choc à stabiliser est le plus important. Et en cas de chocs identiques, la pire des situations se produit quand les effets de la politique sont les plus différents possibles entre les deux périodes. Dans les deux cas cela réduit les possibilités de stabilisation et diminue ainsi l'activisme de la politique. Le mécanisme allant dans le sens de l'activisme dans le cas précédent de l'incertitude sur l'effet global de la politique ne peut jouer un rôle ici. Car vouloir compenser un moindre effet sur la variable cible au cours d'une période par une politique plus active afin de mieux atteindre l'objectif pour cette période, aurait dans le cas présent le coût additionnel de déstabiliser encore davantage la variable cible en dehors de cette période, ce qui rendrait une telle politique non souhaitable.

On obtient en outre le résultat que la politique robuste est encore moins activiste que celle que l'on aurait obtenue à partir d'une approche bayésienne. En effet, d'une part, l'activisme de la politique robuste est d'autant plus faible que les chocs diffèrent entre les périodes puisque la politique robuste répond à la situation biaisée par la présence de tels chocs, où la politique a le moins d'effet au cours de la période où le choc est le plus important. En revanche, l'approche bayésienne, qui ne présente pas ce biais occasionné par la pire des situations, ne réagit qu'au choc moyen mais pas à leur écart. Il en résulte qu'une différence entre les chocs au cours du temps réduit l'activisme de la politique robuste sans diminuer l'activisme de la politique bayésienne. De plus, même dans le cas où les chocs sont les mêmes à toutes les périodes, la politique robuste, qui prend toujours en compte le pire des cas, suppose que l'écart entre les effets des politiques au cours du temps est à sa plus grande valeur possible, ce qui réduit davantage l'activisme que pour la politique bayésienne où cet écart est plus faible, car seulement égal à son écart type.

Ces résultats impliquent que l'argument de Friedman (1960) concernant l'obstacle à une politique activiste que constitue une incertitude sur les délais d'action, voit son importance accentuée si on adopte une approche de l'incertitude en termes de robustese (critère du minimax) plutôt qu'une approche bayésienne. Car, en premier lieu, une approche en termes de robustesse donne un caractère plus spécifique à l'argument concernant une incertitude sur les délais d'action par rapport à un argument plus général lié à une incertitude sur l'effet de la politique. Car, contrairement à ce qui se produit avec une approche bayésienne, une approche en termes de robustesse, qui conduit aussi à moins d'activisme en cas d'incertitude sur les délais d'action, ne conduit pas nécessairement à moins d'activisme en cas d'incertitude sur l'effet global de la politique. En second lieu, lorsqu'il existe une incertitude portant sur les délais d'action de la politique, une approche en termes de robustesse conduit à moins d'activisme qu'une approche bayésienne.

Un autre aspect de l'argument de Friedman (1960) qu'une approche en termes de robustesse peut éventuellement mettre davantage en valeur, concerne l'absence totale de politique de stabilisation que Friedman préconisait pour la politique monétaire. Les résultats que l'on a obtenus indiquent qu'une politique bayésienne ne peut jamais aboutir à un tel inactivisme complet, mais que cela devient possible quand on adopte une approche en termes de robustesse. Les cas où ceci se produit diffèrent selon le type d'incertitude considéré. Dans le cas où l'incertitude porte sur l'effet global de la politique, la politique robuste devient complètement inactiviste dès que l'on envisage la posibilité que la politique n'ait aucun effet ou qu'elle ait un effet pervers (c'est à dire de signe opposé à celui du modèle de référence). Dans le cas où l'incertitude porte sur les délais d'action, il faut, pour que la politique devienne complètement inactiviste, ou bien que l'effet de la politique puisse être, au cours d'une période, nul ou de signe opposé à celle de l'autre période ; ou bien qu'un choc soit, au cours d'une période, nul ou de signe opposé à celui de l'autre période. (Toutefois, même si les deux conditions à la fois le sont, chacune de ces conditions n'est toutefois pas suffisante et réclame une condition supplémentaire). Autrement dit, pour que toute politique de stabilisation soit exclue en cas d'incertitude sur les délais d'action, il faut au cours du temps des situations suffisamment disparates concernant l'effet possible de la politique monétaire ou les chocs. Dans les deux cas d'incertitude considérés, les conditions sont certes restrictives mais la question reste posée de savoir si dans la réalité, pour un type de politique et pour un type de choc donné, on peut être plus ou moins proche de ces conditions. Ainsi par exemple, on peut se demander si de telles conditions ne seraient pas près d'être remplies en ce qui concerne une politique monétaire préventive face à une "bulle spéculative" des marchés financiers. L'incertitude sur l'effet que peut avoir la politique monétaire sur l'évolution d'une bulle spéculative, tant du point de vue de l'effet global que de ses délais d'action, pourrait ainsi justifier l'absence actuelle d'activisme des banques centrales face à une telle politique monétaire préventive [30].

Les modèles qui ont été utilisés ici sont très stylisés, ce qui a permis de traiter de manière analytique et relativement simple les questions consi-

[30] Voir Bernanke (2002) et Greenspan (2004) pour une discussion informelle et un point de vue de la part de banquiers centraux qui peut correspondre à ce schéma.

dérées, tout en permettant une comparaison avec les arguments de référence sur le sujet dans la littérature. Il serait toutefois souhaitable que des travaux ultérieurs reprennent ces questions dans le cadre de modèles de politique monétaire spécifiques plus élaborés. En particulier, les anticipations des agents mériteraient d'être prises en compte dans l'analyse dynamique[31]. Enfin, on s'est ici particulièrement attaché à une interprétation en termes de politique monétaire, mais l'analyse formelle a en fait été développée à partir d'un modèle très simple qui pourrait aussi être interprété dans d'autres contextes, et il serait donc intéressant d'essayer d'appliquer cette analyse à d'autres aspects de la politique économique.

Références

Bean, C. (1999), "Discussion of Charles Goodhart's lecture: central bankers and uncertainty", *Bank of England Quarterly Bulletin,* 39 (1), 115-116.

Bernanke, B. (2002), "Asset-price "bubbles" and monetary policy", remarks before the New York chapter of the National Association for Business Economics, October 15, 2002. The Federal Reserve Board.

Brainard, W. (1967), "Uncertainty and the effectiveness of policy", *American Economic Review,* 57, Papers and Proceedings, 411-425.

Clarida, R., J.Gali et M. Gertler, "The science of monetary policy: a new keynesian perspective", *Journal of Economic Literature,* 37, 1661-1707.

Craine, R. (1979), "Optimal policy with uncertainty", *Journal of Economic Dynamics and Control,* 1 (1), 69-83.

Friedman (1960), *A program for monetary stability,* Fordham University Press, New York.

Gilboa, J et Schmeidler, D. (1989), "Maximin expected utility with non-unique prior", *Journal of Mathematical Economics,* 18, 141-153.

Giannoni, M.P. (2002), "Does model uncertainty justify caution? Robust optimal monetary policy in a forward looking model", *Macroeconomic Dynamics,* 6, 111-144.

Greenspan, A. (2004), "Risk and uncertainty in monetary policy", Remarks at the meetings of the American Economic Association, San Diego, California, January 3, 2004.

Hansen, L.P. and T.J. Sargent (2005), *Misspecfication in recursive economic theory,* manuscrit d'un livre à paraître.

Knight, F.H. (1921), *Risk, uncertainty and profit,* Boston: Houghton Mifflin.

---

[31] Sur l'activisme de la politique robuste dans un cadre où sont pris en compte les anticipations des agents, voir par exemple Tetlow et von zur Muehlen (2001).

Liu, W-F et B. Dupor (2004), "Robust policy and non-attenuation", septembre.

Moulin, H. (1981), *Théorie des jeux pour l'économie et la politique*, Hermann, Paris.

Onatsky, A. (2000), "Minimax analysis of monetary policy under model uncertainty", Department of Economics Harvard University, revised January 2000.

Rudebusch, G.D. (2001), "Is the Fed too timid? Monetary policy in an uncertain World", *The Review of Economics and Statistics*, vol 82(2), 203-217, May.

Rudebusch, G.D. et L.E. Svensson (1999), "Policy rules for inflation targeting", in J. Taylor, *Monetary policy rules*, University of Chicago Press: Chicago, 203-253.

Sargent, T.J. (1999), "Comment on 'Policy rules for open economies' de L.Ball, in J. Taylor, *Monetary policy rules*, University of Chicago Press: Chicago, 203-253.

Shuetrim, G. et C. Thompson (1999), "The Implications of uncertainty for monetary policy", Research Discussion Paper 1999-10, Reserve Bank of Australia.

Söderström, U. (2002), "Monetary policy with uncertain parameters", *Scandinavian Journal of Economics*, 104 (1), 15-145.

Stock, J.S. (1999), "Comment" on 'Policy Rules for Inflation Targeting' de Rudebusch et Svensson, in J. Taylor, *Monetary policy rules*, University of Chicago Press: Chicago, 203-253.

Svensson, L.E.O. (2000), "Robust Control Made Simple", October.

Taylor, J. (1999), *Monetary policy rules*, University of Chicago Press: Chicago, 203-253.

Tetlow, R.J. et P. von zur Muehlen (2001), "Robust monetary policy with misspecified models: does model uncertainty always call for attenuated policy?", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, 911-949.

Von zur Muehlen (2001), Activist vs. non-activist monetary policy: optimal rules under extreme uncertainty (A primer on robust ontrol)", January.

Annexe A

Démonstration de la proposition 1

Considérons d'abord la deuxième partie du programme d'optimisation, qui concerne le choix de P_α pour u donné. D'après (3), $\max_{P_\alpha} E\Omega$ est équivalent à $\max_{P_\alpha} E(\alpha u+\eta)^2$. Or $(\alpha u+\eta)^2$ est une fonction quadratique convexe de α, qui est donc maximisé pour des valeurs de α égales à l'une ou l'autre des bornes de l'intervalle $[\alpha_0-\gamma, \alpha_0+\gamma]$. La valeur $\alpha=\alpha_0-\gamma$ (formellement P_α est alors la loi de probabilité de Dirac $\delta_{\alpha_0-\gamma}$ concentrée en $\alpha_0-\gamma$, la valeur $\alpha_0-\gamma$ étant considérée comme certaine) est solution quand on a l'inégalité $[(\alpha_0-\gamma)u+\eta]^2-[(\alpha_0+\gamma)u+\eta]^2 \geq 0$, ce qui donne $4\gamma u(\alpha_0 u+\eta)\leq 0$. Pour simplifier la présentation prenons le cas $\eta<0$ (la démonstration dans le cas $\eta>0$ étant similaire). Dans ce cas on a $\alpha=\alpha_0-\gamma$ quand u appartient à $\left[0,-\frac{\eta}{\alpha_0}\right]$, et on a $\alpha=\alpha_0+\gamma$ quand u appartient à $]-\infty,0]$ ou $\left[-\frac{\eta}{\alpha_0},+\infty\right[$, avec dans le cas $u=0$ *ou* $u=-\frac{\eta}{\alpha_0}$ indifférence pour α entre $\alpha_0-\gamma$ et $\alpha_0+\gamma$.

Considérons alors choix de u. Examinons d'abord le cas $\gamma<\alpha_0$. D'après ce qui précède, sur $]-\infty,0]$ et $\left[-\frac{\eta}{\alpha_0},+\infty\right[$ le décideur minimise $\Omega(\alpha_0+\gamma)$, dont le minimum est obtenu pour $u=\hat{u}(\alpha_0+\gamma)$, où la fonction $\hat{u}(.)$ est donnée par (9). Or, en utilisant (9), on obtient $0<\hat{u}(\alpha_0+\gamma)<-\frac{\eta}{\alpha_0}$. Par conséquent,

la valeur de u qui minimise cette expression sur $]-\infty,0]$ est $u=0$, et sur $\left[-\frac{\eta}{\alpha_0},+\infty\right[$ est $\left(-\frac{\eta}{\alpha_0}\right)$. Sur $\left[0,-\frac{\eta}{\alpha_0}\right]$ le décideur minimise $\Omega(\alpha_0-\gamma)$ dont le minimum est obtenu pour $u=\hat{u}(\alpha_0-\gamma)$. Par conséquent dans le cas $0<\hat{u}(\alpha_0-\gamma)\leq-\frac{\eta}{\alpha_0}$, ce qui d'après (9) se produit pour $\psi\geq(\alpha_0-\gamma)\gamma$, la valeur de u qui minimise Ω $(\alpha_0-\gamma)$ sur $\left[0,-\frac{\eta}{\alpha_0}\right]$ est $\hat{u}(\alpha_0-\gamma)$; et dans le cas $\psi\leq(\alpha_0-\gamma)\gamma$ où on a $\hat{u}(\alpha_0-\gamma)\geq-\frac{\eta}{\alpha_0}$, cette valeur est $\left(-\frac{\eta}{\alpha_0}\right)$. Il en résulte que la politique robuste $\hat{u}^R$ est dans le cas $\psi\geq(\alpha_0-\gamma)\gamma$ donnée par celle qui parmi les trois solutions trouvées $\{0,-\frac{\eta}{\alpha_0},\hat{u}(\alpha_0-\gamma)\}$ est préférable. Or comme dans ce cas $\hat{u}(\alpha_0-\gamma)$ est optimal sur $\left[0,-\frac{\eta}{\alpha_0}\right]$ il est préférable à la fois à $u=0$ et à $u=-\frac{\eta}{\alpha_0}$ et on a donc $\hat{u}^R=\hat{u}(\alpha_0-\gamma)$. Dans le cas $\psi\leq(\alpha_0-\gamma)\gamma$ la politique robuste est la meilleure des deux valeurs trouvées $\left\{0,-\frac{\eta}{\alpha_0}\right\}$ Or comme dans ce cas $\left(-\frac{\eta}{\alpha_0}\right)$ est optimal sur $\left[0,-\frac{\eta}{\alpha_0}\right]$ il est préférable à 0, et on a donc $\hat{u}^R=-\frac{\eta}{\alpha_0}$.

Examinons maintenant le cas $\gamma\geq\alpha_0$. Sur $]-\infty,0]$ et $\left[-\frac{\eta}{\alpha_0},+\infty\right[$ rien n'est changé par rapport au cas $\gamma<\alpha_0$. Sur $\left[0,-\frac{\eta}{\alpha_0}\right]$, on a maintenant $\hat{u}(\alpha_0-\gamma)\leq 0$. Il en résulte que la meilleure valeur de u sur $\left[0,-\frac{\eta}{\alpha_0}\right]$ est $u=0$. La politique robuste est donc donnée par la meilleure des deux valeurs trouvées $\left\{0,-\frac{\eta}{\alpha_0}\right\}$. Or, on peut voir d'après (3) que la valeur de Ω (pour $\alpha=\alpha_0-\gamma$ ou $\alpha=\alpha_0+\gamma$, ces deux valeurs étant indifférentes et donnant donc la même valeur de Ω lorsque $u=0$ ou $u=-\frac{\eta}{\alpha_0}$) est, lorsque $\gamma\geq\alpha_0$, inférieure pour $u=0$ à celle obtenue pour $u=-\frac{\eta}{\alpha_0}$, ce qui implique que l'on a $\hat{u}^R=0$ dans ce cas.

Annexe B

La politique robuste comme équilibre de Nash

On va, comme c'est souvent fait dans la littérature, considérer le jeu à deux joueurs à somme nulle où l'un des joueurs est le décideur politique qui choisit u et l'autre joueur est une "nature malveillante" qui choisit P_α. La politique robuste du décideur politique est ce qu'en théorie des jeux on appelle une "stratégie prudente" du décideur politique. Or on sait, d'après la théorie des jeux à deux joueurs à somme nulle [32], que s'il existe un équilibre de Nash de ce jeu, alors celui-ci est formé des stratégies prudentes des joueurs. La politique robuste est donc dans ce cas la stratégie d'équilibre du décideur politique à l'équilibre de Nash.

On peut voir qu'il existe un équilibre de Nash $(\hat{u}^R, \hat{P}_\alpha^R)$ de ce jeu. En effet, d'après les résultats obtenus précédemment, dans le cas $\gamma < \alpha_0$ et $\psi \geq (\alpha_0 - \gamma)\gamma$, on a $\hat{P}_\alpha^R = \delta_{\alpha_0-\gamma}$, où $\delta_{\alpha_0-\gamma}$ est la loi de probabilité entièrement concentrée en $\alpha_0 - \gamma$; et dans le cas $\gamma \geq \alpha_0$, on a $\hat{P}_\alpha^R = \delta_0$, concentrée en $\alpha = 0$. Le problème qui se pose concerne le cas $\gamma < \alpha_0$ et $\psi < (\alpha_0 - \gamma)\gamma$, où on a $\hat{u}^R = -\frac{\eta}{\alpha_0}$, et où la nature est alors indifférente entre $\alpha = \alpha_0 - \gamma$ et $\alpha = \alpha_0 + \gamma$. Dans ce cas, la probabilité $\hat{P}_\alpha^R$ est nécessairement de la forme $P_\alpha(\lambda) = \lambda\delta_{\alpha_0-\gamma} + (1-\lambda)\delta_{\alpha_0+\gamma}$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$. Or, utilisant (3) et minimisant $E\Omega$ pour cette loi de probabilité, on obtient la meilleure réponse du décideur politique suivante :

$$\hat{u}[P_\alpha(\lambda)] = \frac{\alpha_0 + (1-2\lambda)\gamma}{\alpha_0^2 + \gamma^2 + 2(1-2\lambda)\alpha_0\gamma + \psi}\,\eta \tag{27}$$

On peut alors choisir λ tel que $\hat{u}[P_\alpha(\lambda)] = -\frac{\eta}{\alpha_0}$, ce qui donne :

$$\hat{\lambda}^R = \frac{(\alpha_0 + \gamma)\gamma + \psi}{2\alpha_0\gamma} \tag{28}$$

On a bien $0 \leq \hat{\lambda}^R \leq 1$. Dans le cas $\gamma < \alpha_0$ et $\psi < (\alpha_0 - \gamma)\gamma$, on a donc $\hat{P}_\alpha^R = P_\alpha(\hat{\lambda}^R)$. On peut voir que l'on a $\frac{1}{2} \leq \hat{\lambda}^R \leq 1$. Par conséquent, dans tous les cas, on a $E\alpha \leq \alpha_0$ pour la probabilité $\hat{P}_\alpha^R$. La politique robuste correspond donc à une politique bayésienne avec une croyance biaisée vers un plus faible effet de la politique.

Remarquons que cet équilibre de Nash n'est pas en "stratégie pure" pour la Nature, puisque dans le cas $\psi < (\alpha_0 - \gamma)\gamma$, la probabilité $\hat{P}_\alpha^R$ n'est pas concentrée en un point. Autrement dit, si l'on avait posé le problème initial en considérant que la Nature choisit non pas P_α mais le paramètre α lui même dans $[-\gamma, \gamma]$, aucun équilibre de Nash n'aurait existé. On aurait toutefois, de la même manière que précédemment dans l'annexe A, pu calcu-

[32] Voir par exemple Moulin (1981).

ler la même politique robuste, mais celle-ci n'aurait pu correspondre à aucun équilibre de Nash. Hansen et Sargent (2005, chapitre 5), dans un modèle semblable mais avec une incertitude concernant un paramètre additif et en se restreignant à des stratégies "pures" de la Nature, avaient aussi souligné la possibilité qu'aucun équilibre de Nash n'existe dans un tel jeu.

Annexe C

Démonstration de la proposition 3

Utilisant (8) et (9) on obtient que $|\hat{u}_C| - |\hat{u}(\alpha_0 - \gamma)|$ est du signe de $\psi - \alpha_0(\alpha_0 - \gamma)$. Comme on se situe dans le cas $\alpha_0 - \gamma > 0$, cela implique $\alpha_0(\alpha_0 - \gamma) > \gamma(\alpha_0 - \gamma)$ ce qui entraîne que quand on a $\psi > \alpha_0(\alpha_0 - \gamma)$ on a aussi $\psi > \gamma(\alpha_0 - \gamma)$, et par conséquent $\hat{u}^R = \hat{u}(\alpha_0 - \gamma)$, d'après la proposition 1. Il en résulte que dans le cas $\psi > \alpha_0(\alpha_0 - \gamma)$ on a $|\hat{u}^R| < |\hat{u}^C|$. Dans le cas $\psi < \alpha_0(\alpha_0 - \gamma)$, on peut voir, en utilisant (9), que l'on a $|\hat{u}^C| < \frac{|\eta|}{\alpha_0}$. Comme dans ce cas on a aussi $|\hat{u}^C| < |\hat{u}(\alpha_0 - \gamma)|$, il en résulte, d'après la proposition 1, que l'on a nécessairement $|\hat{u}^C| < |\hat{u}^R|$.

Annexe D

Démonstration de la proposition 4

Le programme à résoudre est $\min_{u_0} \max_{P_\xi} E\Omega_0$, où P_ξ est n'importe quelle loi de probabilité sur ξ de support $[-\mu, \mu]$. On va, comme dans l'annexe B, considérer le jeu contre une nature malveillante et rechercher un équilibre de Nash de ce jeu, ce qui nous fournira alors la politique robuste. Contrairement à ce qui se passe dans le modèle précédent, on va voir qu'il est possible d'obtenir un équilibre de Nash en stratégies "pures" de la nature, la loi de probabilité d'équilibre étant alors de la forme δ_ξ (où δ_ξ est la loi de probabilité concentrée en un point ξ), ce qui correspond à une certitude quant à cette valeur ξ. Autrement dit on va considérer que le choix de la Nature porte sur ξ qui est alors choisi dans l'intervalle $[-\mu, \mu]$.

Dans ce jeu, la meilleure réponse du décideur politique à la stratégie ξ de la Nature est alors donnée par la politique optimale lorsque ξ est pris comme certain. La minimisation de Ω_0 donné par (14) donne alors :

$$\hat{u}_0(\xi) = -\frac{\alpha_m \eta_m + \xi \eta_d}{\alpha_m^2 + \xi^2 + \psi} \tag{29}$$

La meilleur réponse de la Nature pour u_0 donné est celle qui maximise Ω_0. Utilisant (14) on peut écrire $\Omega_0 = 2f(\xi) + A$, où A est un terme indépendant de ξ et où on a :

$$f(\xi) \equiv u_0^2 \xi^2 + 2\eta_d u_0 \xi \tag{30}$$

Comme $f(\xi)$ est une fonction quadratique convexe de ξ, la valeur de ξ qui maximise $f(\xi)$ est égale à μ ou $(-\mu)$ selon le signe de $f(\mu) - f(-\mu)$. D'après (30) on a $f(\mu) - f(-\mu) = 4\mu u_0 \eta_d$, qui est de signe de $u_0\eta_d$. Par conséquent, on a $\xi = \mu$ lorsque $u_0\eta_d > 0$ et $\xi = -\mu$ quand $u_0\eta_d < 0$, avec indifférence entre μ et $(-\mu)$ lorsque $u_0\eta_d = 0$. Or, dans le cas $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} < \frac{|\alpha_m|}{\mu}$, d'après (29), $\hat{u}_0(\xi)$ est de signe opposé à $\alpha_m\eta_d$. Par conséquent, on a $\xi = -\mu$ lorsque $\alpha_m\eta_m\eta_d > 0$, c'est à dire lorsque η_d est de même signe que $\alpha_m\eta_m$, auquel cas on a bien $|\hat{u}^R| = |\hat{u}_0(\mu)|$ donné par (18). Lorsque $\alpha_m\eta_m\eta_d < 0$, c'est à dire lorsque η_d est de signe opposé à celui de $\alpha_m\eta_m$, on a $\xi = \mu$, ce qui implique $|\hat{u}^R| = |\hat{u}_0(\mu)|$, et redonne également (18). On peut remarquer que, lorsque $\eta_d \neq 0$, le choix de ξ revient à donner à la politique son effet le plus faible en valeur absolue au cours de la période où le choc est le plus important en valeur absolue (et vice versa) ; et, lorsque $\eta_d = 0$, à rendre les effets de la politique les plus différents possibles aux deux périodes.

Dans le cas $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} > \frac{|\alpha_m|}{\mu}$, d'après (29), on a $\hat{u}_0(\xi)$ de signe opposé à celui de $\xi\eta_d$, et donc $\hat{u}_0(\xi)\eta_d$ du signe opposé à celui de ξ. Or si on a $u_0 \neq 0$ (auquel cas on a aussi $u_0\eta_d \neq 0$ puisque $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} > \frac{|\alpha_m|}{\mu}$ implique $\eta_d \neq 0$), pour qu'un équilibre de Nash avec $u_0 \neq 0$ existe, on devrait avoir $\xi = \mu$ lorsque $\hat{u}_0(\mu)\eta_d > 0$ et $\xi = -\mu$ lorsque $\hat{u}_0(-\mu)\eta_d < 0$, ce qui est impossible puisque l'on a $\hat{u}_0(\xi)\eta_d$ de signe opposé à ξ. Dans le cas $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} > \frac{|\alpha_m|}{\mu}$ un équilibre de Nash avec $u_0 \neq 0$ ne peut donc exister. Par contre, $\left(u_0 = 0, \xi^* = -\frac{\alpha_m\eta_m}{\eta_d}\right)$ est dans ce cas un équilibre de Nash, puisque d'après (29) on a $\hat{u}_0(\xi^*) = 0$, et que lorsque $u_0 = 0$ le choix de ξ est indifférent et donc ξ^* peut être considéré comme une meilleure réponse de la Nature malveillante. Comme on est dans le cas $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} > \frac{|\alpha_m|}{\mu}$, on a bien $\xi^* \in [-\mu, \mu]$. On a donc $\hat{u}^R = 0$ dans ce cas.

Dans (18), le dénominateur est positif et le numérateur l'est aussi dans le cas $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} \leq \frac{|\alpha_m|}{\mu}$, le numérateur étant une fonction décroissante de μ et le dénominateur une fonction croissante de μ. On a donc $\frac{\partial|\hat{u}_0^R|}{\partial\mu} < 0$. Enfin, si on compare (18) à (17), utilisant l'inégalité $\sigma_\xi^2 \leq \mu^2$, on obtient $|\hat{u}_0^R| \leq |\hat{u}_0^B(\sigma_\xi^2)|$ dans le cas $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} \leq \frac{|\alpha_m|}{\mu}$. Et, comme dans le cas $\frac{|\eta_d|}{|\eta_m|} \geq \frac{|\alpha_m|}{\mu}$ on a $\hat{u}_0^R = 0$ et $\hat{u}_0^B(\sigma_\xi^2) \neq 0$, l'inégalité $|\hat{u}_0^R| < |\hat{u}_0^B(\sigma_\xi^2)|$ est alors vérifiée.

Annexe E

Démonstration de la Proposition 5

Considérons d'abord la politique optimale $\hat{u}_0(\xi)$ quand la valeur de ξ est connue. Utilisant (19), (22) et (23), la condition du premier ordre $\frac{\partial\Omega_0}{\partial u_0} = 0$ donne la relation suivante entre u_0 et u_1 :

$$2(\alpha_m^2 + \xi^2 + \psi)u_0 + (\alpha_m^2 - \xi^2)u_1 + (\alpha_m + \xi)\eta_1 = 0 \tag{31}$$

Ensuite la condition du premier ordre $\frac{\partial \Omega_0}{\partial u_t} = 0$ pour $t \geq 1$ donne la relation :

$$2(\alpha_m^2 + \xi^2 + \psi)u_t + (\alpha_m^2 - \xi^2)(u_{t-1} + u_{t+1}) = 0 \tag{32}$$

Cette dernière relation est une équation aux différences homogène du deuxième ordre dont l'équation caractéristique est :

$$g(z) \equiv (\alpha_m^2 - \xi^2)z^2 + 2(\alpha_m^2 + \xi^2 + \psi)z + \alpha_m^2 - \xi^2 = 0 \tag{33}$$

On montre facilement que cette équation admet deux racines réelles dont l'une est de valeur absolue supérieure à 1 et l'autre, que l'on désignera par $\lambda(\xi^2)$ puisqu'elle dépend de ξ^2, de valeur absolue inférieure à 1 (ces deux racines étant de signe opposé à $\alpha_m^2 - \xi^2$). La solution de cette équation est donc :

$$u_t = u_0[\lambda(\xi^2)]^t; \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

où d'après (33) on a

$$\lambda(\xi^2) = -\frac{\alpha_m^2 + \xi^2 + \psi - \sqrt{(\alpha_m^2 + \xi^2 + \psi)^2 - (\alpha_m^2 - \xi^2)^2}}{\alpha_m^2 - \xi^2} \tag{35}$$

Remplaçant, selon (34) , u_1 par $u_0\lambda(\xi^2)$ dans (31), on obtient la politique optimale $\hat{u}_0(\xi)$ lorsque la valeur ξ est certaine :

$$\hat{u}_0(\xi) = -\frac{(\alpha_m + \xi)\eta_1}{2(\alpha_m^2 + \xi^2 + \psi) + (\alpha_m^2 - \xi^2)\lambda(\xi^2)} \tag{36}$$

La politique bayésienne s'obtient de la même manière. La seule différence est que l'on doit remplacer dans les expressions précédentes ξ par $E\xi$, et ξ^2 par $E\xi^2$. Comme on considère les lois de probabilité pour lesquelles on a $E\xi = 0$, on a l'égalité $E\xi^2 = \sigma_\xi^2$. Il en résulte que la politique bayésienne $\hat{u}^B = (\sigma_\xi^2)$ s'obtient en substituant, dans les expressions précédentes concernant la politique au certain, la valeur zéro à ξ, et la valeur σ_ξ^2 à ξ^2. On obtient ainsi $\hat{u}_t^B = (\lambda^B)^t \hat{u}_0^B$ et (24) de la proposition 5, où on a posé $\lambda^B = \lambda(\sigma_\xi^2)$, la fonction λ (.) étant donnée par (35) où on remplace ξ^2 par σ_ξ^2.

Afin de déterminer la politique robuste on va, comme dans la démonstration de la proposition 4, chercher un équilibre de Nash du jeu à deux joueurs à somme nulle où l'un des joueurs est le décideur politique qui choisit u_0, u_1, u_2,...et l'autre joueur est une nature malveillante qui choisit ξ dans l'intervalle $[-\mu,\mu]$. La meilleure réponse du décideur politique à la stratégie ξ de la nature est donnée par la politique en situation de certitude, déterminée par (34) et (36). Pour déterminer la meilleure réponse de la Nature, on va tout d'abord utiliser le fait qu'à l'équilibre de Nash les égalités (34) doivent être satisfaites. Remplaçant, pour $t \geq 1$, u_t par $\lambda^t u_0$ dans (23), avec la valeur limite $\beta = 1$, on obtient :

$$\Omega_0(\xi) = (\alpha_1 u_0 + \eta_1)^2 + \frac{(\alpha_1\lambda + \alpha_2)}{1-\lambda^2}\, u_0^2 \tag{37}$$

D'après (13) et (37) on obtient :

$$\Omega_0(\xi) = \frac{2u_0^2}{1+\lambda}\,\xi^2 + 2\eta_1 u_0 \xi + G \tag{38}$$

où G est un terme indépendant de ξ et où on a intentionellement supprimé dans les notations la dépendance de u_0 et λ par rapport à ξ, puisqu'à l'équilibre de Nash la nature prend comme données les politiques (u_t). Considérons d'abord le cas où on a $u_0 \neq 0$. D'après (38), Ω_0 (ξ) est une fonction quadratique convexe de ξ, et la maximisation de Ω_0 (ξ) donne donc une des bornes de l'intervalle $[-\mu, \mu]$. Or d'après (38), on a $\Omega_0(\mu) - \Omega_0(-\mu) = 4\mu u_0 \eta_1$.Ceci implique que la meilleure réponse de la nature à $u_0 \neq 0$ est $\xi = -\mu$ si on a $u_0\eta_1 < 0$; et $\xi = \mu$ si on a $u_0\eta_1 > 0$. Or d'après (36), que doit satisfaire u_0 à l'équilibre de Nash, u_0 (ξ) η_1 est de signe opposé à $\alpha_m + \xi$ (car, en utilisant (35), on montre que le dénominateur de (36) est positif). Cela implique que l'on doit avoir $\xi = -\mu$ si $\alpha_m - \mu > 0$, c'est à dire (puisque $\mu \geq 0$) si $\alpha_m > \mu \geq 0$; et $\xi = \mu$ si $\alpha_m + \mu < 0$, c'est à dire si $\alpha_m < -\mu \leq 0$. Or l'un de ces cas peut se produire si et seulement si on a $|\alpha_m| > \mu$, c'est à dire si l'effet de la politique est toujours de même signe aux deux périodes (α_1 et α_2 de mêmes signes). Le pire des cas, que choisit la nature, consiste alors simplement à minimiser en valeur absolue $|\alpha_m + \xi|$, c'est à dire $|\alpha_1|$, ce qui est intuitif, et correspond à ce que l'on avait touvé à la section précédente, puisque ce n'est qu'à la première période qu'il y a un choc non nul. D'où l'équilibre de Nash, et la politique robuste de la proposition 5.

Dans le cas $|\alpha_m| \leq \mu$, les conditions indiquées pour avoir un équilibre de Nash avec $u_0 \neq 0$ ne peuvent être satisfaites. Considérons alors la possibilité d'avoir un équilibre de Nash avec $u_0 = 0$, et donc $u_t = 0$ pour tout t. La valeur $\xi = -\alpha_m$, qui appartient bien à $[-\mu, \mu]$ dans le cas $|\alpha_m| \leq \mu$, donne, d'après (36), $\hat{u}_0(\xi) = 0$. Et lorsque $u_0 = 0$, (38) indique que le choix de ξ n'importe plus, de sorte que $\xi = -\alpha_m$ peut être considérée comme une meilleure réponse de la nature. Il en résulte que, dans le cas $|\alpha_m| < \mu$, on a l'équilibre de Nash ($u_t = 0$ pour tout t, $\xi = -\alpha_m$). La politique robuste est donc dans ce cas $u_t = 0$ pour tout t.

A partir de (35) on obtient $\frac{d[(\alpha_m^2 - \sigma_\xi^2)\lambda(\sigma_\xi^2)]}{d\sigma_\xi^2} > -1$, ce qui, en utilisant (24), implique $\frac{d|\hat{u}_0^B|}{d\sigma_\xi^2} < 0$. De même, en utilisant (25), on obtient $\frac{d|\hat{u}_0^R|}{d\mu} < 0$, dans le cas $\mu < |\alpha_m|$ *où* $\hat{u}_0^R$ n'est pas nul. A partir de (35) on obtient $\frac{d|\lambda^R|}{d\sigma_\xi^2} < 0$ quand $\sigma_\xi < |\alpha_m|$ (et $\frac{d|\lambda^R|}{d\mu} < 0$ quand $\mu < |\alpha_m|$). Ensuite, (26) permet d'en conclure les inégalités portant sur $\frac{d|\hat{u}_t^B|}{d\sigma_\xi^2}$ et $\frac{d|\hat{u}_t^R|}{d\mu}$.

Dans le cas $\mu < |\alpha_m|$, comme on a alors $\frac{d|\hat{u}_t^B|}{d\sigma_\xi^2} < 0$, $\frac{d|\lambda^B|}{d\sigma_\xi^2} < 0$ et $\frac{d|\hat{u}_t^B|}{d\sigma_\xi^2} < 0$, les valeurs minimales de $|\hat{u}_0^B|$ et $|\lambda^B|$ *et* $|\hat{u}_t^B|$ sont obtenues dans le cas où σ_ξ^2 prend sa valeur maximale $\sigma_\xi^2 = \mu^2$. Soient $|\hat{u}_0^{B*}|$ et $|\lambda^{B*}|$ et $|\hat{u}_t^{B*}|$ ces valeurs. Faisant $\sigma_\xi^2 = \mu^2$, (35) implique que l'on a $\lambda^{B*} = \lambda^R$ (et par conséquent $|\lambda^R| \leq |\lambda^B|$). Comparant alors (24), où on fait $\sigma_\xi^2 = \mu^2$, à (25), cela implique que les dénominateurs de ces expressions sont les mêmes. Le numérateur étant plus petit pour $|\hat{u}_0^R|$ que pour $|\hat{u}_0^{B*}|$, on en déduit $|\hat{u}_0^R| < |\hat{u}_0^{B*}|$, et par conséquent aussi $|\hat{u}_0^R| < |\hat{u}_0^B|$. Les relations (34) permettent alors d'en déduire $|\hat{u}_t^R| \leq |\hat{u}_t^B|$ pour tout t. Dans le cas $|\alpha_m| \geq \mu$, on a $\hat{u}_t^R = 0$ pour tout t, et donc $|\hat{u}_0^R| < |\hat{u}_0^{B*}|$ et $|\hat{u}_t^R| \leq |\hat{u}_t^B|$ pour tout t.

Annexe F

Cas de la politique monétaire

On considère le modèle $\{(4), (5), (6)\}$ de politique monétaire de la section 2.2. Considérons le cas particulier où l'incertitude concerne seulement le coefficient a_r, le coefficient a_y étant supposé connu. On remplace dans (6) la variable π par son expression donnée par (4). On obtient :

$$\Omega = (a_y y + \nu_1)^2 + \chi y^2 \tag{39}$$

Cette expression est une forme quadratique $Q(y)$. On peut donc la mettre sous la forme canonique suivante :

$$\Omega = Q(y) = Q(\hat{y}^c) + (a_y^2 + \chi)(y - \hat{y}^c)^2 \tag{40}$$

où $\hat{y}^c$ est la valeur de y qui minimise $Q(y)$, ce qui correspond à la valeur optimale de y en situation de certitude. Comme a_y est connu, on peut prendre à la place de Ω, de manière équivalente, la fonction de perte $\tilde{\Omega} = (y - \hat{y}^c)^2$.

Dans ce cas on se ramène donc bien, comme indiqué dans le texte, au modèle de base $\{(1), (2)\}$.

Quand a_y et a_r sont tous deux incertains, et que l'on prend l'approche bayésienne, où on a $Ea_y = a_{y0}$ et $Ea_r = a_{r0}$, et si pour simplifier on suppose que ay et a_r sont indépendants entre eux, la minimisation de $E\Omega$ donne :

$$r = \frac{a_{r0}}{a_{r0}^2 + \sigma_{a_r}^2}\left(\nu_2 + \frac{a_{y0}}{a_{y0}^2 + \sigma_{a_y}^2 + \chi}\ \nu_1\right) \tag{41}$$

En réponse à un choc ν_1 affectant la relation de Phillips, l'incertitude sur a_y ainsi que celle sur a_r contribuent toutes deux à diminuer l'activisme de la politique bayésienne. Et en réponse à un choc ν_2 affectant la relation IS, seule l'incertitude sur le coefficient a_r de cette relation IS contribue à réduire l'activisme de cette politique. Remarquons que, pour chacun des paramètres a_y et a_r, les expressions traduisant cet effet de moindre activisme sont identiques à celles données précédemment pour le modèle de base (voir équation (8)) avec, comme indiqué dans la section 2.2, un coefficient $\psi = 0$ pour l'incertitude due au coefficient a_r. On peut vérifier que l'on retrouve bien dans (41) chacun des deux cas particuliers où l'incertitude ne porte que sur un seul des deux paramètres a_y ou a_r, cas qui pouvaient se ramener directement au modèle de base $\{(1), (2)\}$.

Annexe G

Incertitude additive et politique robuste

On modifie l'équation (1) du modèle en incorporant un terme supplémentaire additif w :

$$x = \alpha u + w + \eta \tag{42}$$

On suppose que l'incertitude ne porte plus sur le coefficient α mais sur ce terme additif w. On suppose que w appartient à l'intervalle $[w_0 - \gamma_w, w_0 + \gamma_w]$. Dans le cas bayésien où il y a une loi de probabilité a priori d'espérance w_0, il y a équivalence au certain puisque l'on a un modèle linéaire quadratique. La politique bayésienne est alors la même que celle en situation de certitude avec $w = w_0$. Dans le cas de la politique robuste avec critère du minimax, on obtient le résultat suivant [33] :

Proposition 6 : Dans le cas $\psi \leq \psi^*_w \equiv \frac{\alpha^2 \gamma_w}{|w_0 + \eta|}$, la politique robuste $\hat{u}^R_w$ *est donnée par* $\hat{u}^R_w = -\frac{w_0 + \eta}{\alpha}$. *Dans le cas* $\psi \geq \psi^*_w$, *la politique robuste est obtenue pour la valeur de* w *qui donne à* $\eta + w$ *sa plus grande valeur absolue. On a donc dans ce cas :* $\hat{u}^R_w = -\frac{\alpha(\eta + w_0 + \gamma_w)}{\alpha^2 + \psi}$ *si* $w_0 + \eta > 0$ *et* $\hat{u}^R_w = -\frac{\alpha(\eta + w_0 - \gamma_w)}{\alpha^2 + \psi}$ *si* $w_0 + \eta < 0$. *Comme on a, pour la politique en certitude,* $\hat{u}^C_w = -\frac{\alpha(\eta + w_0)}{\alpha^2 + \psi}$, *on a dans tous les cas l'inégalité* $|\hat{u}^R_w| > |\hat{u}^B_w| = |\hat{u}^C_w|$, *c'est à dire que la politique robuste est plus activiste que la politique bayésienne (cette dernière étant toujours identique à celle en situation de certitude).*

Dans le cas d'incertitude additive sur le modèle, alors qu'il y a équivalence au certain pour la politique bayésienne, la politique robuste est quant à elle toujours plus activiste que la politique en certitude (et donc que la politique bayésienne). On retrouve ici le résultat de plus grand activisme de la politique robuste qui a été souligné dans la littérature (Sargent (1999) lorsqu'on considère une incertitude additive.

Il s'agit toutefois ici d'une incertitude qui reste paramétrique sur w. Dans le cadre d'un tel modèle statique, Hansen et Sargent (2005), chapitre 5, examine aussi la possibilité d'une incertitude non paramétrique où le terme additif suit une loi de probabilité de densité quelconque et où est utilisé un critère d'entropie pour mesurer l'écart au modèle de référence. L'espace des distortions apportées au modèle n'est alors plus celui des valeurs de w, mais

[33] La démonstration s'effectue de la même manière que dans le cas de l'incertitude sur α. Remarquons que Hansen et Sargent (2005), chapitre 5, considèrent également la politique robuste en se situant dans le cas particulier $\alpha = \psi = 1$ du présent modèle.

celui de l'espace fonctionnelle de ces densités. Hansen et Sargent établissent une équivalence formelle entre le problème du minimax correspondant et celui du jeu avec "multiplicateur" contre une nature malveillante, où pour chaque décision la nature choisit la densité la plus défavorable et où le multiplicateur est celui associé à la contrainte d'entropie. Lorsqu'ils appliquent ce cadre d'analyse à un modèle dynamique, ces auteurs montrent que l'approche du contrôle robuste qui utilise le critère H_∞ se retrouve comme cas limite lorsque ce multiplicateur tend vers une valeur critique qui constitue une borne inférieure (non admissible) à l'ensemble des valeurs admissibles du multiplicateur (voir chapitre 7 de Hansen et Sargent (2005)). Dans le cadre du présent modèle statique (et dans le cas particulier $\alpha = \psi = 1$ qu'ils considèrent), Hansen et Sargent (2005) (chapitre 5) obtiennent la politique robuste particulière $\hat{u}_w^R = -\frac{w_0 + \eta}{\alpha}$ de la proposition 6 ci-dessus, lorsqu'ils font tendre le multiplicateur vers cette valeur limite inférieure critique.