

Le marché dans les modèles de Gérard Debreu

Nathalie Berta*

Université de Reims, G.R.E.S.E. (Université de Paris I Panthéon-Sorbonne)

Introduction

Fidèle aux conceptions de l'école mathématique « de Bourbaki », Gérard Debreu considère que l'axiomatisation d'une théorie implique une dichotomie stricte entre sa structure mathématique et ses interprétations économiques. Il s'agit ici d'expliquer à la lumière de cette position de l'auteur, l'extrême rareté des références au marché dans l'ensemble de ses écrits, et notamment dans la *Théorie de la Valeur*.

Une étude exhaustive des quelques occurrences du terme de marché permet de montrer qu'elles sont très circonstanciées : le marché est en effet associé à la présence d'un agent fictif qui – qualifié de « market participant » et introduit dans la démonstration d'existence de 1954 – a pour fonction d'annuler l'excès de demande de chaque bien. Or cet agent, véritable incarnation du marché dans le modèle, disparaît de la démonstration d'existence proposée quelques années plus tard dans la *Théorie de la valeur*. Disparaît alors avec lui toute référence explicite au marché dans cet ouvrage.

* Je remercie vivement Gérard Debreu pour la patience avec laquelle il a répondu à mes questions pendant la phase d'élaboration de cet article. Bien entendu, l'interprétation de ses travaux proposée ici n'engage que moi.

1 Le statut des interprétations dans la théorie économique axiomatisée

Partisan de la méthode axiomatique en économie, Debreu se situe dans la perspective de l'école mathématique dite « de Bourbaki »¹. Selon cette dernière, la mise sous forme axiomatique d'une théorie s'articule autour de la notion centrale de structure mathématique, sorte de squelette logique dépouillé de tout contenu intuitif :

Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites – les structures mathématiques; (...) Il n'est pas niable, bien entendu que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé; mais c'est également en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir pleinement leur rôle élaborateur (Bourbaki (1948), p.46).

Cette séparation entre forme et contenu doit permettre de mettre en valeur et de vérifier la cohérence logique de la théorie mais aussi d'associer à une même axiomatique une pluralité d'interprétations. Debreu propose une conception similaire du statut des interprétations associées à une théorie axiomatisée² :

An axiomatized theory first selects its primitive concepts and represents each one of them by a mathematical object (...) Next assumptions on the objects representing the primitive concepts are specified, and consequences are mathematically derived from them. The economic interpretation of the theorems so obtained is the last step of the analysis (Debreu, (1986), p.1265).

La première étape est celle de la sélection des « concepts premiers » et de leur représentation mathématique; elle permet de fixer le cadre conceptuel sur lequel reposera la structure mathématique du modèle. Selon Hildenbrand (1983), les concepts premiers de la *Théorie de la Valeur* seraient ainsi constitués de l'espace des marchandises, du système de prix, ainsi que des unités de consommation et de production. La seconde étape est alors celle de la spécification des hypothèses et de la déduction mathématique des résultats. L'interprétation économique des concepts, hypothèses et théorèmes établis ne constitue donc que la dernière étape de la mise sous forme axiomatique. « Selon ce schéma, une théorie axiomatisée a une forme mathématique complètement séparée de son contenu économique » (Debreu (1986), p.1265). Cette dichotomie permet alors de tester la cohérence logique de la structure mathématique d'une théorie ainsi dépouillée de toute interprétation, mais permet en outre « des extensions immédiates de cette analyse sans modification de la théorie par une simple réinterprétation des

¹ Debreu fut en contact étroit avec ce courant lors de ses années de formation à l'École Normale Supérieure. Pour plus de précisions sur ce point, voir Mirowski et Weintraub (1994).

² Pour un exposé plus détaillé des positions de Debreu vis à vis de l'axiomatisation, se référer à (Ingrao – Israel, (1987), pp.280-88).

concepts » ((1959), VIII)³. Le théoricien jouit donc d'une grande liberté quant à la traduction économique qu'il associe à sa théorie.

Le statut accordé par Debreu aux interprétations économiques d'une théorie axiomatisée explique le degré d'abstraction élevé qui caractérise ses écrits. Néanmoins, Debreu ne se refuse pas à toute interprétation. La réserve qu'il manifeste ce faisant est toutefois particulièrement prononcée quand il s'agit, comme nous allons le voir, de se référer au terme de marché.

2 L'agent de marché

Comprendre la réserve avec laquelle Debreu fait référence au marché, nécessite, en l'absence de toute définition de l'auteur, de procéder à une étude exhaustive des rares occurrences de ce terme dans l'ensemble de ses écrits⁴. Il apparaît alors qu'elles sont très circonstanciées : les références au marché sont associées à la présence d'un agent fictif, qualifié de « market participant » et introduit dans la démonstration d'existence de 1954 (Arrow et Debreu (1954)).

Pour démontrer que l'économie « concurrentielle » qu'ils considèrent possède bien un équilibre, Arrow et Debreu utilisent le théorème d'existence de l'équilibre de Nash pour un jeu qu'ils qualifient d'« économie abstraite »⁵. Il leur faut alors donner à un tel jeu la forme d'une économie concurrentielle et donc spécifier les stratégies possibles et les fonctions de gain des joueurs de manière appropriée. À l'équilibre, les consommateurs et les producteurs choisissent leurs stratégies – leurs paniers de biens – en maximisant leurs fonctions de gain – leurs utilités ou leurs profits. Toutefois, leurs choix dépendent des prix donnés. C'est pourquoi, et c'est ce qui nous intéresse ici, le passage du jeu, de l'économie abstraite, à l'économie concurrentielle nécessite l'introduction d'un agent supplémentaire, le « market participant » :

We will here define an abstract economy whose equilibrium points will have all the properties of a competitive equilibrium. There will be $m+n+1$ participants, the m consumption units, the n production units, and a fictitious participant who chooses prices, and who may be termed the *market participant* (Arrow et Debreu (1954), p.79).

Le participant de marché se voit donc attribuer comme ensemble de stratégies possibles, P , l'ensemble des vecteurs-prix possibles, et comme fonction de gain celle qui associe à chaque vecteur-prix p le produit scalaire

³ Pour illustrer cette possibilité de réinterprétations successives d'un même concept, Debreu fait généralement référence au concept de marchandise : d'abord considérée comme un bien caractérisé physiquement, elle fut ensuite interprétée comme un bien daté et localisé, ce qui aurait permis d'introduire le temps et l'espace dans la théorie, sans en modifier la structure mathématique.

⁴ Nous ne prétendons pas fournir de définition du marché; nous cherchons à établir les circonstances dans lesquelles le terme de marché est employé, afin indirectement d'expliquer son absence de la *Théorie de la Valeur*.

⁵ Debreu (1952) a en effet démontré quelques années auparavant qu'un jeu de ce type, qu'il qualifie alors de « social system » possédait au moins un équilibre.

$p \cdot z$, où z représente le vecteur des demandes nettes globales à ces prix. Le participant de marché choisit donc un vecteur prix p dans P de manière à maximiser $p \cdot z$, la valeur des demandes nettes globales. Ce faisant, il applique la loi de l'offre et de la demande et détermine ainsi le vecteur prix d'équilibre : « This is precisely the classical "law of supply and demand", and so the motivation of the market participant corresponds to one of the elements of a competitive equilibrium » (ibid., p.79).

La présence indispensable de cet agent est d'ailleurs réaffirmée dans toutes les présentations ultérieures de cette démonstration que proposera Debreu ((1974), (1982) et (1984))⁶. Il constitue par conséquent l'un des concepts premiers du modèle, au même titre que les consommateurs et les producteurs. En outre, comme Debreu l'affirme lui-même, il incarne le marché dans le modèle : "one of the agents is the impersonal market" ((1974), p.219). Dans la mesure où cet agent constitue l'unique représentation mathématique du marché, sa disparition de la démonstration d'existence proposée dans la *Théorie de la Valeur* (1959) explique alors l'absence de référence explicite au marché dans cet ouvrage.

3 La Théorie de la Valeur

Alors que Debreu affirme en avant-propos de la *Théorie de la Valeur* qu'il s'est fixé comme objectif « l'explication de la valeur des biens et des services résultant de l'interaction par l'intermédiaire des marchés, des agents d'une économie de propriété privée » ((1959), VII), l'extrême rareté des références au marché dans le reste de l'ouvrage paraît singulière.

Elle s'explique par l'abandon volontaire de toute allusion au participant de marché lors de la démonstration. La démonstration adoptée dans la *Théorie de la Valeur* diffère sensiblement de celle proposée en 1954. Elle ne mobilise plus la théorie des jeux ni le théorème d'existence de Nash. Or, c'était justement lors du passage du jeu à l'économie concurrentielle qu'était introduit le participant de marché. Dans la *Théorie de la Valeur*, Debreu applique directement le théorème du point fixe – théorème déjà utilisé dans la démonstration de 1954 à travers le résultat de Nash – à une économie qu'il qualifie alors d'économie « de propriété privée ». Plus précisément, il construit une correspondance $\phi(\cdot)$ de \mathbb{R}^{2l} dans lui-même – où l désigne le nombre de marchandises – qui associe à tout couple prix-quantité (p, z) un couple formé par les prix qui maximisent le produit scalaire $p \cdot z$ et les demandes nettes à ces prix. Debreu montre alors que les points fixes

⁶ "... we introduce a fictitious market agent whose role is to choose a price vector in P (...) The maximization with respect to p of this function (i.e. of $p \cdot z$) agrees with a commonly held view of the way in which prices perform their market-equilibrating role by making commodities with positive excess demand more expensive and commodities with negative excess demand less expensive, thereby, increasing the value of excess demand" ((1982), pp.708-9).

de cette correspondance, s'ils existent, constituent des équilibres – les demandes nettes totales étant alors toutes négatives ou nulles⁷.

Si Debreu ne fait plus intervenir explicitement l'agent fictif censé incarner le marché, on peut considérer que sa présence reste néanmoins indispensable. En effet, la construction de la correspondance $\phi(\cdot)$ fait toujours intervenir la maximisation de la valeur de l'excès de demande $p \cdot z$, qui est alors justifiée en ces termes :

L'idée centrale de la démonstration consiste, étant donné un excès de la demande z , à choisir p dans P de façon à maximiser $p \cdot z$ (...) [Ce procédé] révèle la tendance qu'a un accroissement du prix d'une marchandise à faire décroître l'excès de la demande correspondant. Il pousse, quand on essaie de réduire les excès de demande positifs, à placer le poids du système de prix sur les marchandises pour lesquelles l'excès de la demande est le plus grand (ibid., p.90).

Debreu suggère donc que la maximisation de $p \cdot z$, réalisée en 1954 par l'agent de marché, traduit une « tendance » non spécifiée des prix à réduire les écarts entre offres et demandes globales; elle renvoie donc implicitement au jeu de « la loi de l'offre et de la demande ».

Dans le modèle de 1954, le marché est donc incarné par un agent fictif dont la fonction consiste à maximiser la valeur des demandes nettes globales. L'absence du marché de la *Théorie de la valeur* s'explique alors aisément par l'absence, au cours de la démonstration, de toute référence explicite à cet agent censé l'incarner. Toute référence au marché dans l'ouvrage déborderait alors le champ des interprétations autorisées par l'axiomatisation. Toutefois, si l'absence du terme marché s'explique par celle de l'agent qui l'incarne, l'absence de référence à cet agent ne peut s'expliquer uniquement par le changement dans la démonstration : en effet, cette dernière fait toujours intervenir la maximisation de la valeur des demandes nettes. Seule l'interprétation associée à cette maximisation change : attribuée en 1954 au participant de marché, elle renvoie désormais à une « tendance » non spécifiée des prix à réduire les excès de demandes. Est ici en jeu la liberté interprétative du théoricien inhérente à toute axiomatisation revendiquée par Debreu.

⁷ La condition de demandes nettes négatives à l'équilibre est liée à la présence de biens libres.

Bibliographie

- Arrow K. J. et G. Debreu, (1954), "Existence of an equilibrium for a competitive economy", *Econometrica*, vol. 22, pp.265-290.
- Bourbaki N., (1948), « L'Architecture des mathématiques », *Les grands courants de la pensée mathématique*, François Le Lyonnais (éds), pp.35-47.
- Bourbaki N., (1949), "Foundations of mathematics for the working mathematician", *The Journal of Symbolic Logic*, vol.14, n° 1, pp.1-8.
- Debreu G., (1952), "A social equilibrium existence theorem", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 38, pp.886-893.
- Debreu G., (1959), *Théorie de la valeur, Analyse axiomatique de l'équilibre économique*, coll. Monographies de recherche opérationnelle, Paris, Dunod, 1966.
- Debreu G., (1974), "Four aspects of the mathematical theory of economic equilibrium", *Proceedings of The International Congress of Mathematicians*, Vancouver, vol.1, pp.65-77.
- Debreu G., (1977), "The axiomatization of economic theory", discours de réception du doctorat *honoris causa* de la Rheinische Friedrich-Wilhelm-Universität à Bonn, partiellement reproduit in Hildenbrand (1983).
- Debreu G., (1982), "Existence of competitive equilibrium", *Handbook of Mathematical Economics*, vol.2, chap. 15, K. J. Arrow et M. D. Intriligator (éds), North-Holland Publishing Company.
- Debreu G., (1984), "Economic theory in the mathematical mode", *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 86(4), pp.393-410.
- Debreu G., (1986), "Theoretic models: mathematical form and economic content", *Econometrica*, vol.54(6), pp.1259-70.
- Debreu G., (1987), "Existence of general equilibrium", in J. Eatwell, M. Milgate et P. Newman (éds), *The new Palgrave*, vol.II, pp.216-8.
- Debreu G., (1991), "Mathematization of economic theory", *The American Economic Review*, vol.81(1), pp.1-7.
- Hildenbrand W., (1983), Introduction de *Mathematical economics: twenty papers of Gérard Debreu*, Cambridge University Press.
- Ingrao B. et G. Israel, (1987), *The Invisible Hand*, The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, 1990.
- Mirowski P. et E. R. Weintraub, (1994), "The pure and the applied: Bourbaki comes to mathematical economics", *Science in Context*, vol.7.2, pp.245-272.