e-Learning tools for Electrical Engineering

Temática – Circuitos Eléctricos

Capítulo – Regime Sinusoidal

GRANDEZAS SINUSOIDAIS

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, faz-se uma pequena introdução às grandezas alternadas onde se apresentam algumas das razões porque os sistemas alternados sinusoidais (AC) se impuseram face aos sistemas contínuos (DC), apresentam-se os parâmetros que caracterizam uma grandeza alternada sinusoidal e o conceito de valor eficaz de uma grandeza periódica, particularizando o cálculo para uma grandeza alternada sinusoidal.

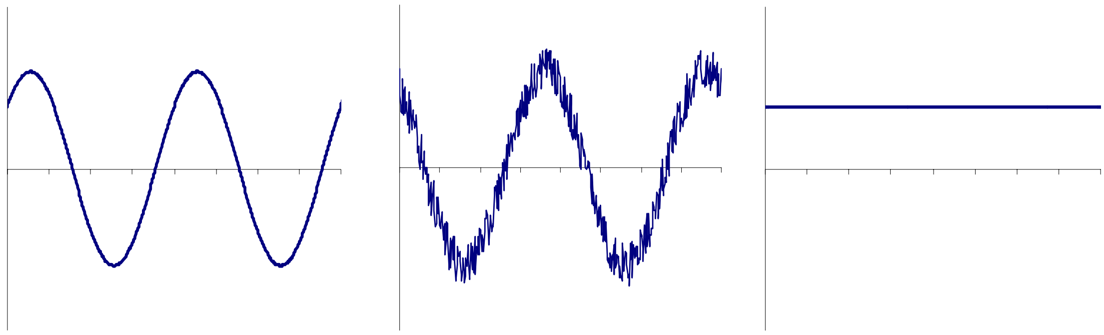
A representação de grandezas AC através da notação complexa (vectores girantes) simplifica o tratamento matemático necessário à análise do regime permanente de circuitos em AC. Exemplificam-se algumas operações matemáticas com fasores e respectiva representação gráfica.

- Pré-requisitos: Componentes Elementares e Álgebra Linear
- Nivel :
- Duração estimada: 30 minutos
- Autor: Maria José Resende
- Realização: Sophie Labrique

Este projecto é financiado pela União Europeia no âmbito de uma acção Sócrates-Minerva. As informações nele contidas são da exclusiva responsabilidade dos seus autores. A União Europeia declina toda a responsabilidade relativamente ao seu uso.

1. INTRODUÇÃO

As funções alternadas sinusoidais são particularmente importantes para a análise de circuitos pois a maior parte dos sistemas de produção e distribuição eléctrica gera e transmite energia através de grandezas cuja evolução no tempo se pode considerar sinusoidal; a sigla, normalmente utilizada para designar esta forma de energia eléctrica é "AC" e deriva da designação inglesa *Alternating Current*.



(a) (b) (c)

Figura 1 – (a) Grandeza alternada sinusoidal; (b) Grandeza Alternada não sinusoidal (c) Grandeza contínua

A grande vantagem da alimentação em AC, comparativamente à DC (*Direct Current*) onde as grandezas têm uma evolução constante no tempo, verifica-se na eficiência do transporte de energia por esta se poder fazer a muito alta tensão; a tensão alternada produzida numa central é elevada por um transformador que, consequentemente diminui, aproximadamente, na mesma proporção a corrente; as perdas Ri^2 são assim menores em alta tensão, do que seriam se a energia fosse transportada ao nível de tensão a que é produzida. Esta foi a principal razão porque os sistemas AC se impuseram face aos sistemas DC.

2. DEFINIÇÃO

Uma grandeza alternada sinusoidal, $x(t)$, pode ser descrita pela expressão matemática:

$$x(t) = X_M \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

sendo $x(t)$ o **valor instantâneo**, X_M a sua **amplitude máxima**, $(\omega t + \varphi)$ a **fase**, ω a **frequência angular** que se expressa em radianos por segundo $\left[rad/s\right]$ e φ a fase inicial expressa em radianos.

A frequência angular relaciona-se com a **frequência** f, expressa em ciclos por segundo ou hertz (Hz), através de:

$$\omega = 2\pi f$$

A frequência pode ser expressa em função do período T, através de:

$$f = \frac{1}{T}$$

Todos estes parâmetros da sinusóide estão graficamente representados na figura seguinte

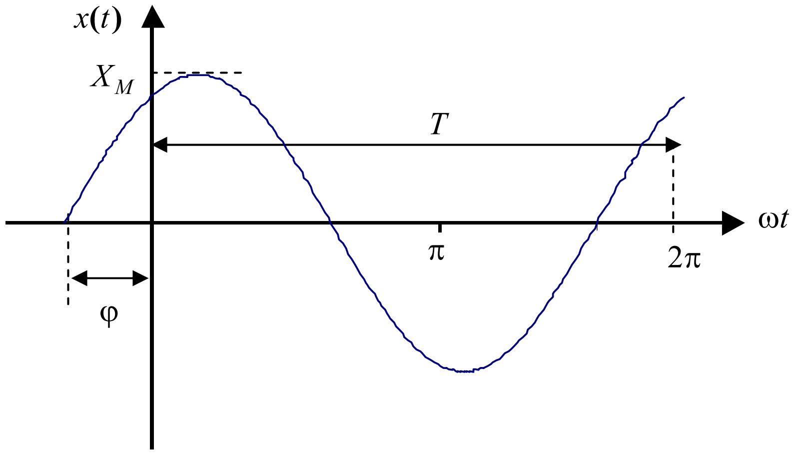
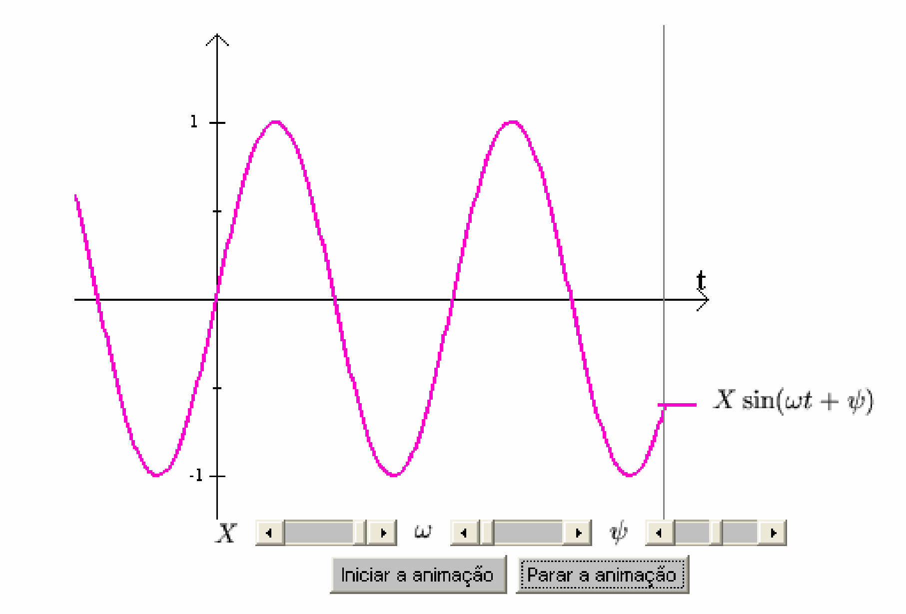


Figura 2 – Representação gráfica de uma grandeza sinusoidal



Dadas duas grandezas sinusoidais com igual frequência, descritas pelas expressões:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{e} \quad y(t) = Y_M \sin(\omega t + \gamma)$$

designa-se por **desfasagem** entre as grandezas, a diferença de fases iniciais, $(\varphi - \gamma)$.

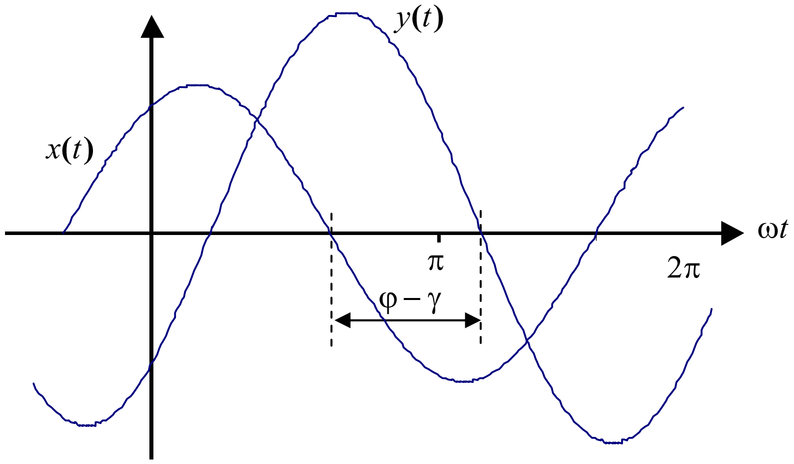


Figura 3 – Representação gráfica do desfasamento entre duas grandezas sinusoidais

De acordo com o exemplo dado, diz-se que a grandeza $x(t)$ está avançada $(\varphi - \gamma)$ radianos, relativamente a $y(t)$. A afirmação dual também é válida: a grandeza $y(t)$ está atrasada $(\varphi - \gamma)$ radianos, relativamente a $x(t)$.

3. VALOR EFICAZ

O conceito de valor eficaz de uma tensão ou corrente alternada sinusoidal está directamente ligado à potência transferida por esse par de grandezas; é através do valor eficaz que se pode comparar a potência associada a grandezas AC com potências associadas a grandezas DC.

Fisicamente, o **valor eficaz** de uma corrente alternada é o valor da intensidade de uma corrente contínua que produziria, numa resistência, o mesmo efeito calorífico que a corrente alternada em questão.

Matematicamente, o valor eficaz, X_{ef}, de uma grandeza periódica $x(t)$ é determinado através de:

$$X_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (x(t))^2 \, dt}$$

O caso particular de uma grandeza alternada sinusoidal expressa por $x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$, a expressão anterior conduz a:

$$X_{ef} = \frac{X_M}{\sqrt{2}}$$

Poder-se-á assim escrever:

$$x(t) = \sqrt{2}\; X_{ef} \sin(\omega t + \varphi)$$

Graficamente, o valor eficaz está relacionado com a área sob a curva que representa a evolução temporal do quadrado da grandeza, tal como se representa na figura seguinte.

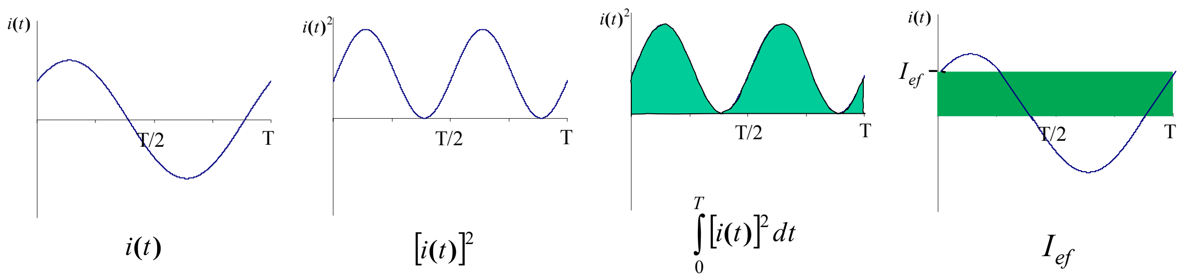


Figura 4 – Representação gráfica do cálculo do valor eficaz

O valor eficaz de uma grandeza altera-se com a amplitude, com perturbações na forma da onda, mas não é afectado por variação da frequência, nem da fase inicial

4. NOTAÇÃO COMPLEXA

A notação complexa é uma forma de representar grandezas alternadas sinusoidais através de vectores que variam no tempo (vectores girantes). A notação complexa foi introduzida por Steinmetz, em 1893, e veio simplificar a análise do regime permanente de circuitos alimentados em AC.

Pretende-se determinar qual o vector representativo da tensão descrita por $u(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi)$

Partindo da função de Euler

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$

onde j representa a unidade imaginária, pode-se escrever:

$$e^{j(\omega t+\varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)$$

multiplicando ambos os membros da expressão por U_M, obtém-se:

$$U_M e^{j(\omega t+\varphi)} = U_M \cos(\omega t + \varphi) + jU_M \sin(\omega t + \varphi)$$

que será designado por **vector girante** e representado por:

$$\overline{U}_M(t) = U_M e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Comparando a expressão de $\overline{U}_M(t)$ com a da evolução temporal de $u(t)$, conclui-se que $u(t)$ corresponde à parte imaginária de $\overline{U}_M(t)$. Em termos matemáticos tem-se:

$$u(t) = \mathrm{Im}\left\{U_M e^{j(\omega t+\varphi)}\right\}$$

Atendendo a que

$$U_M e^{j(\omega t+\varphi)} = U_M e^{j\varphi}.e^{j\omega t}$$

o número complexo $\overline{U}_M(t)$ pode ser representado no plano complexo como um vector que, para $t = 0$, vale $U_M e^{j\varphi}$ e que rodará com frequência angular ω ao longo do tempo (correspondente à multiplicação por $e^{j\omega t}$)

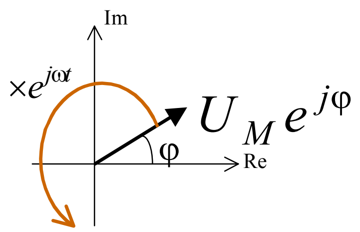
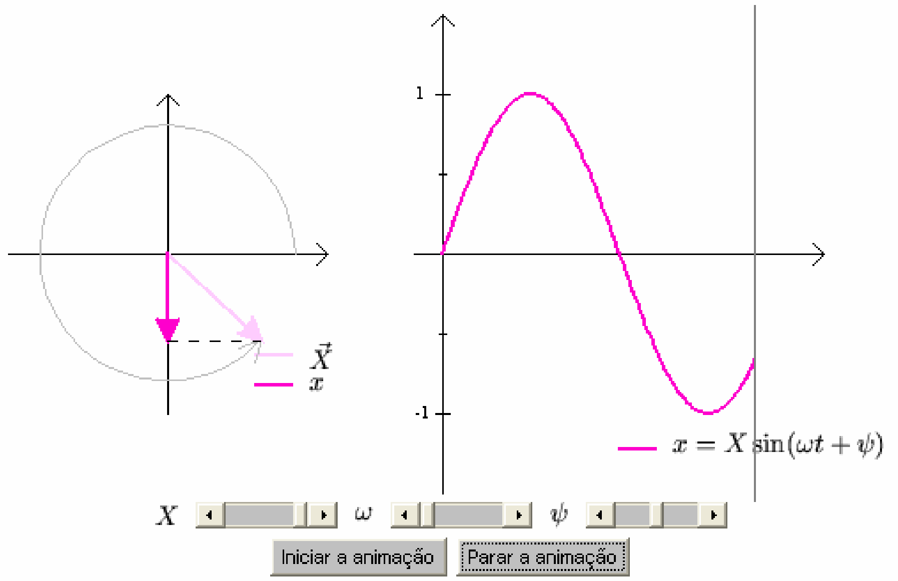


Figura 5 – Representação gráfica de um vector girante

O vector $U_M e^{j\varphi}$ designa-se por **amplitude complexa** de $\overline{U}_M(t)$

Graficamente, a tensão descrita por $u(t) = U_M \sin(\omega t + \varphi)$ será, em cada instante, a projecção de $\overline{U}_M(t)$ sobre o eixo dos imaginários.



5. OPERAÇÕES MATEMÁTICAS COM AMPLITUDES COMPLEXAS

Adicionar duas grandezas sinusoidais com a mesma frequência angular

Dadas duas grandezas sinusoidais descritas por:

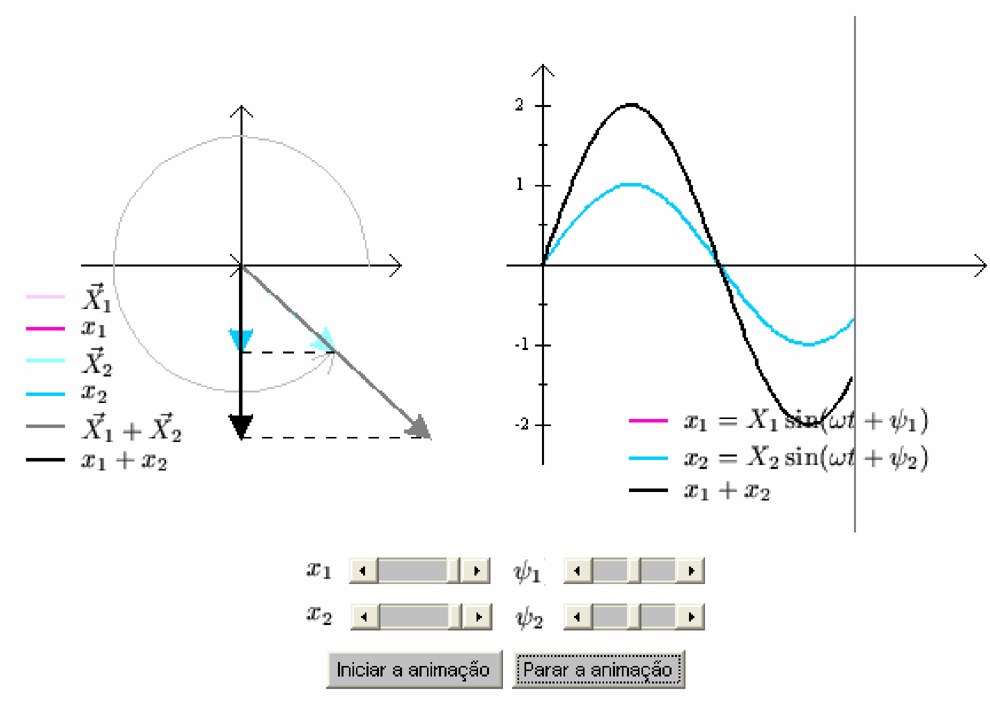
$$x_1(t) = X_{M1} \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_{M2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

analiticamente, a sua soma será dada por:

$$x_1(t) + x_2(t) = X_{M1} \sin(\omega t + \varphi_1) + X_{M2} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Se se representar cada grandeza pelo respectivo vector girante, a sua soma será representada pela soma dos dois vectores; a evolução temporal da soma corresponde à parte imaginária deste vector soma:

$$x_1(t) + x_2(t) = \mathrm{Im}\left\{\overline{X}_{M1}(t) + \overline{X}_{M2}(t)\right\}$$



Multiplicar uma grandeza sinusoidal por uma constante real

Dada a grandeza sinusoidal descrita por:

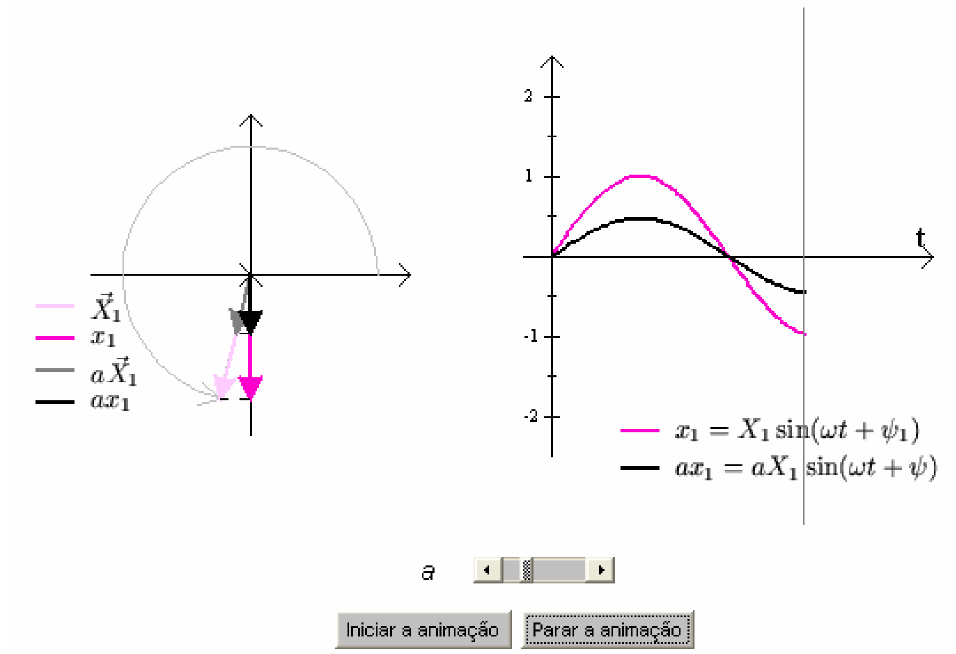
$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$$

analiticamente, a sua multiplicação pela constante real K é dada por:

$$K\ x(t) = K\ X_M \sin(\omega t + \varphi)$$

Se se representar a grandeza pelo respectivo vector girante, a sua multiplicação por K é representada por um vector colinear com $\overline{X}_M(t)$ mas cujo módulo vale $K\ X_M$; a evolução temporal $K\ x(t)$ corresponde à parte imaginária deste vector:

$$K\ x(t) = \mathrm{Im}\left\{K\ \overline{X}_M(t)\right\} = \mathrm{Im}\left\{K\ X_M e^{j(\omega t + \varphi)}\right\}$$



Produto de duas grandezas sinusoidais com a mesma frequência angular

Dadas duas grandezas sinusoidais descritas por:

$$x_1(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi_2)$$

analiticamente, o seu produto será dado por:

$$x_1(t)\, x_2(t) = X_{M1} X_{M2} \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Se se representar cada grandeza pelo respectivo vector girante, o seu produto será representado por um vector de fase $(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)$, isto é, rodará com uma frequência angular dupla, e de módulo $X_{M1}\ X_{M2}$; a evolução temporal do produto corresponde à parte imaginária deste vector:

$$x_1(t)\, x_2(t) = \mathrm{Im}\left\{\overline{X}_{M1}(t)\ \overline{X}_{M2}(t)\right\} = \mathrm{Im}\left\{X_{M1}\ X_{M2} e^{j(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)}\right\}$$

Derivação de uma grandeza sinusoidal

Dadas a grandeza sinusoidal descritas por:

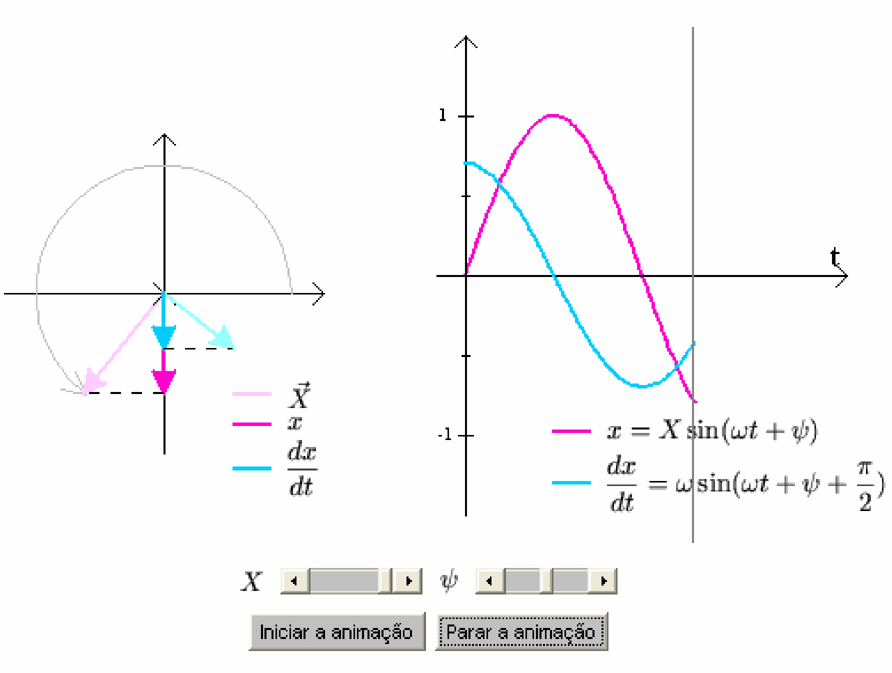
$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$$

analiticamente, a sua derivada será dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \omega X_M \cos(\omega t + \varphi) = \omega X_M \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Se se representar a grandeza pelo respectivo vector girante, a sua derivada será representada por um vector de fase $(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$, isto é, avançado $\frac{\pi}{2}$ relativamente a $x(t)$, e de módulo ωX_M ; a evolução temporal da derivada corresponde à parte imaginária deste vector:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathrm{Im}\left\{\frac{d\overline{X}_M(t)}{dt}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{d}{dt}\left(X_M\ e^{j(\omega t + \varphi)}\right)\right\} = \mathrm{Im}\left\{j\omega X_M\ e^{j(\omega t + \varphi)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\omega X_M\ e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}\right\}$$



Integração de uma grandeza sinusoidal

Dadas a grandeza sinusoidal descritas por:

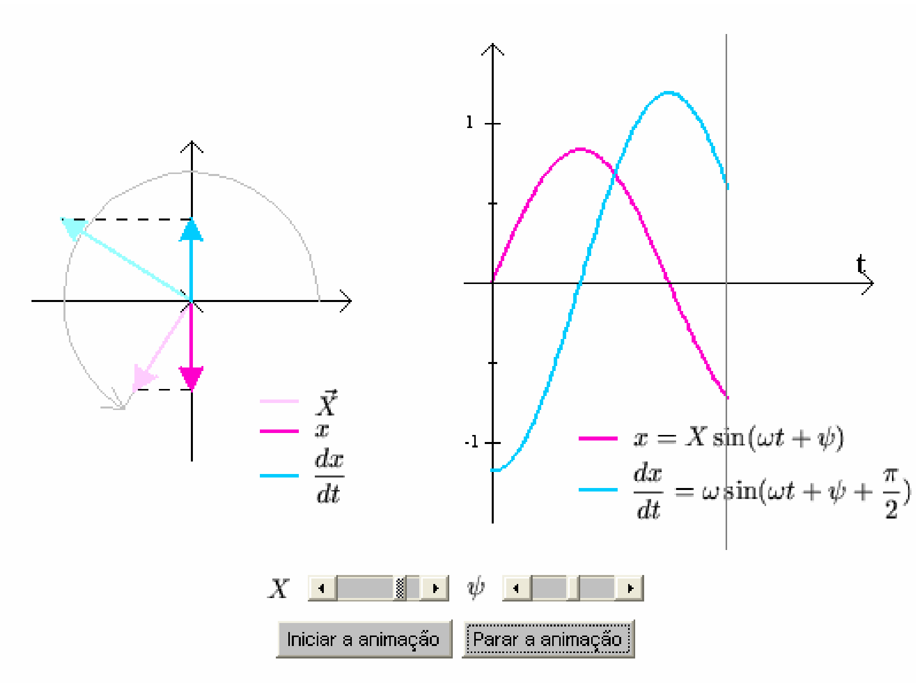
$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \varphi)$$

analiticamente, o seu integral será dado por:

$$\int x(t)dt = -\frac{X_M}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) = \frac{X_M}{\omega}\sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Se se representar a grandeza pelo respectivo vector girante, o seu integral será representado por um vector de fase $(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$, isto é, atrasado $\frac{\pi}{2}$ relativamente a $x(t)$, e de módulo $\frac{X_M}{\omega}$; a evolução temporal do integral corresponde à parte imaginária deste vector:

$$\int x(t)dt = \mathrm{Im}\left\{\int \overline{X}_M(t)dt\right\} = \mathrm{Im}\left\{\int \left(X_M\ e^{j(\omega t+\varphi)}\right)dt\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{X_M}{j\omega}\ e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{X_M}{\omega}\ e^{j(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})}\right\}$$



$\vec{X}$
x
$\frac{dx}{dt}$
1
-1
t
$x = X\sin(\omega t + \psi)$
$\frac{dx}{dt} = \omega\sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})$
X
ψ
Iniciar a animação
Parar a animação