

ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS DE SORTIE

Thématique : *Électronique de puissance*

↪ **Chapitre :** *Onduleurs*

↪ **Section :** *Commande MLI*

Type ressource : *Exposé* *Laboratoire virtuel / Exercice* *Qcm*

Dans ce laboratoire, on effectue l'analyse harmonique des tensions fournies par un onduleur MLI.

- *pré requis : principe de la commande MLI*
- *niveau : 3 - questions avancées*
- *durée estimée : 2 heures*
- *auteur(s) : Francis Labrique (UCL)*
- *réalisation : Sophie Labrique*



ANALYSE HARMONIQUE DES TENSIONS

La ou les tensions appliquées à la charge se déduisent des potentiels aux bornes des différents bras.

On peut donc obtenir l'analyse harmonique des tensions à partir des potentiels des bras.

Nous allons donc en premier lieu effectuer l'analyse harmonique du potentiel d'un bras, puis appliquer cette analyse aux potentiels des différents bras pour obtenir

- l'analyse harmonique de la tension de sortie d'un onduleur monophasé
- l'analyse harmonique des tensions de sortie d'un onduleur triphasé
et nous en tirerons des
- conclusions.

PSEUDO DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER DU POTENTIEL P_j D'UN BRAS

Question 1

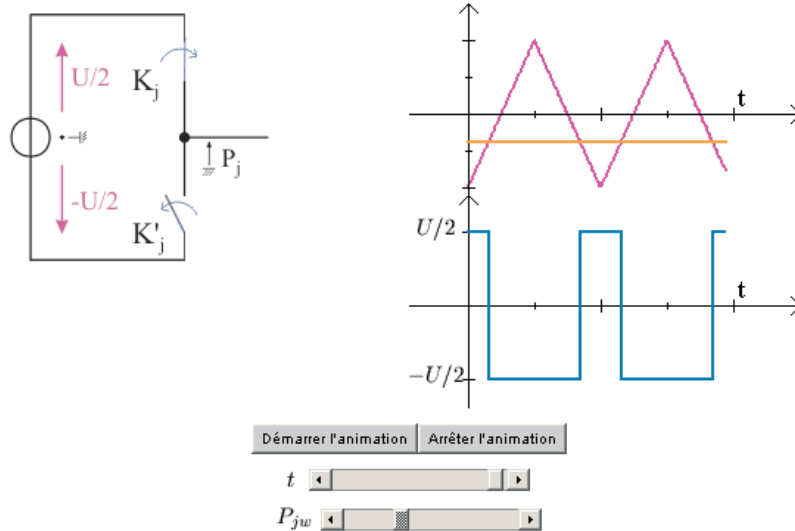
On considère le cas où les potentiels P_j est fixé par la comparaison d'une onde de référence P_1 avec une porteuse triangulaire ξ .

On suppose que la porteuse est d'amplitude unitaire et de période T .

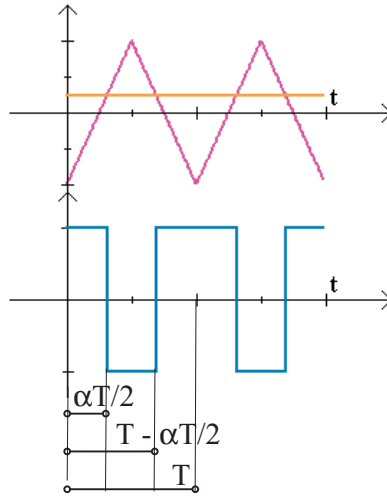
Pour P_1 , on a (figure 1)

$$P_j = \frac{U}{2} \quad \text{si } P_{jw} > \xi$$

$$P_j = -\frac{U}{2} \quad \text{si } P_{jw} < \xi$$



Si P_{jw} était constant (figure 2), P_j serait une fonction périodique de période T . Quel serait alors son développement de Fourier ?



Réponse

On aurait le développement en série de Fourier suivant pour P_j :

$$P_j = \frac{U}{2} P_{jw} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2U}{i\pi} \sin\left[i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{jw}\right)\right] \cos(i\omega_p t)$$

ou encore :

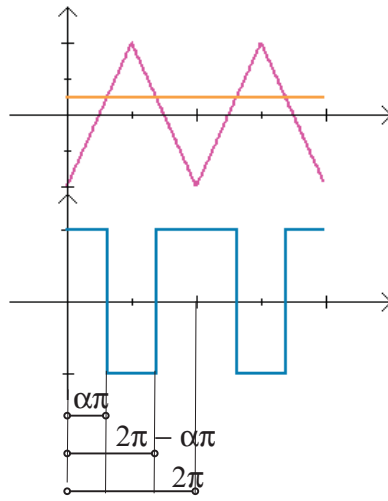
$$\begin{aligned} P_j &= \frac{U}{2} P_{jw} + \sum_{i=1}^{\xi} (-1)^{i-1} \frac{2U}{(2i-1)\pi} \cos\left[(2i-1)\frac{\pi}{2} P_{jw}\right] \cos[(2i-1)\omega_p t] \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{(2k\pi)} \sin\left[2k\frac{\pi}{2} P_{jw}\right] \cos[2k\omega_p t] \end{aligned}$$

avec $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$, la pulsation de la porteuse.

Justification

La valeur moyenne de P_j est égale à (figure 3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_j d\omega_p t &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\alpha\pi} \frac{U}{2} d\omega_p t + \int_{\alpha\pi}^{2\pi-\alpha\pi} -\frac{U}{2} d\omega_p t + \int_{2\pi-\alpha\pi}^{2\pi} \frac{U}{2} d\omega_p t \right] \\ &= (2\alpha - 1) \frac{U}{2} \end{aligned}$$



La valeur de α est liée à celle de P_{jw} par :

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{jw}$$

soit

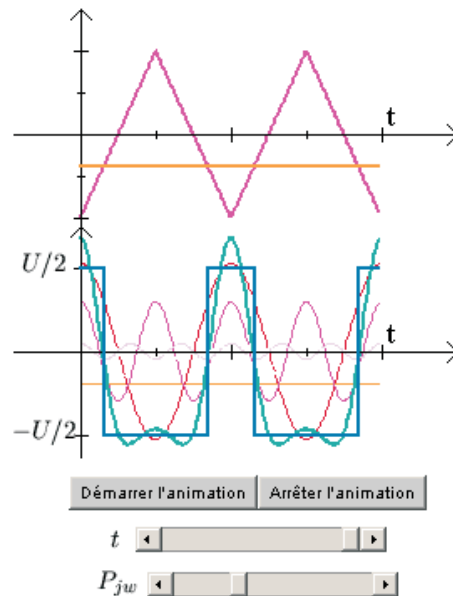
$$2\alpha - 1 = P_{jw}$$

D'où finalement

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_j d\omega_p t = \frac{U}{2} P_{jw}$$

Les harmoniques de P_j ne comportent que des termes en cosinus en raison de la symétrie de l'onde par rapport à $\omega_p \frac{T}{2} = \pi$.

Le premier harmonique de P_j (le terme en $\cos \omega_p t$) a pour amplitude (figure 4).



Choisissez le rang de l'harmonique :

0 1 2 3

Aucun 1 terme 2 termes 3 termes 4 termes

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos \omega_p t d\omega_p t \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\alpha\pi} \frac{U}{2} \cos \omega_p t d\omega_p t + \int_{\alpha\pi}^{2\pi-\alpha\pi} -\frac{U}{2} \cos \omega_p t d\omega_p t + \int_{2\pi-\alpha\pi}^{2\pi} \frac{U}{2} \cos \omega_p t d\omega_p t \right] \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos \omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{\pi} \sin(\alpha\pi)$$

D'où finalement, comme

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{jw}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos \omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{jw}\right) = \frac{2U}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} P_{jw}\right)$$

Le deuxième harmonique de P_A (le terme en $\cos 2\omega_p t$) a pour amplitude

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos 2\omega_p t d\omega_p t \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\alpha\pi} \frac{U}{2} \cos 2\omega_p t d\omega_p t + \int_{\alpha\pi}^{2\pi-\alpha\pi} -\frac{U}{2} \cos 2\omega_p t d\omega_p t + \int_{2\pi-\alpha\pi}^{2\pi} \frac{U}{2} \cos 2\omega_p t d\omega_p t \right] \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos 2\omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{2\pi} \sin 2\alpha\pi$$

D'où finalement, comme

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} P_{jw}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_j \cos 2\omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{2\pi} \sin\left(2\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2} P_{jw}\right) = -\frac{U}{\pi} \sin(\pi P_{jw})$$

Et ainsi de suite.

Question 2

• Si P_{jw} varie en fonction du temps, P_j n'est plus une fonction périodique de période T puisque la largeur des créneaux varie de période en période.

Mais si P_{jw} varie lentement à l'échelle de la période de modulation T , la largeur des créneaux varie peu d'une période de modulation à la suivante : autour de l'instant t on reconstruit de manière satisfaisante $P_j(t)$ en prenant le développement en série de Fourier qu'on aurait si P_{jw} était constante de valeur $P_{jw}(t)$.

Que devient dans ces conditions le développement en série de Fourier si $P_{jw} = r \sin(\omega t + \theta_0)$?

Réponse

$$\begin{aligned} P_j(t) &\simeq \frac{U}{2} P_{jw}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{2U}{(2j-1)\pi} \cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{2} P_{jw}(t)\right] \cos[(2j-1)\omega_p t] \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{2k\pi} \sin\left[2k\frac{\pi}{2} P_{jw}(t)\right] \cos(2k\omega_p t) \end{aligned}$$

Si

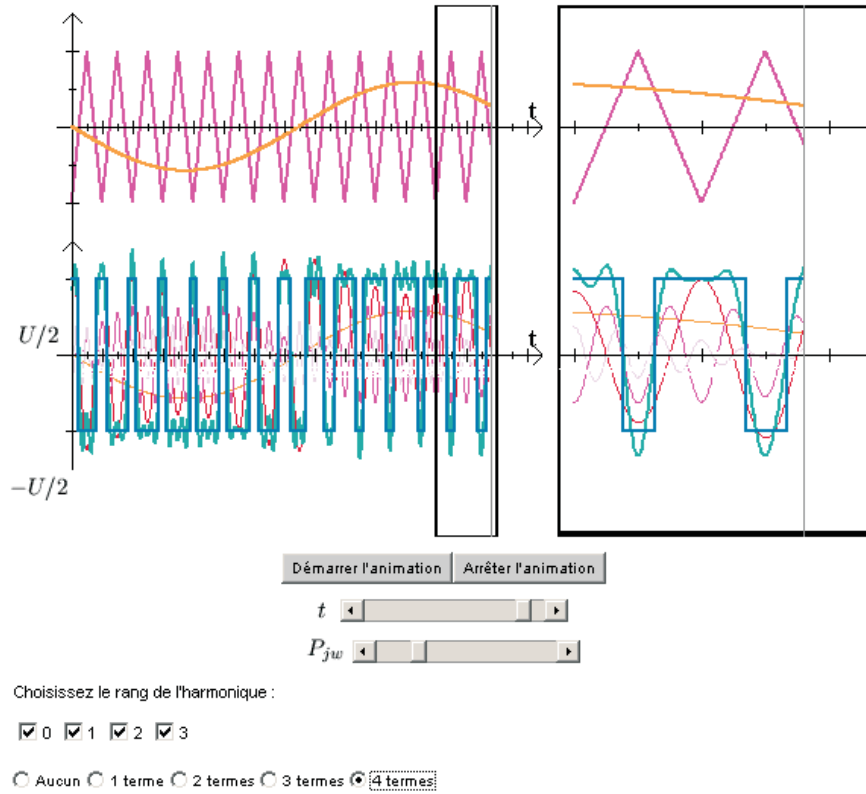
$$P_{jw}(t) = r \sin(\omega t + \theta_0) \quad \text{avec} \quad \omega \ll \omega_p$$

On a :

$$P_j(t) \simeq r \frac{U}{2} \sin \omega t + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{2U}{(2j-1)\pi} \cos \left[(2j-1) \frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos[(2j-1)\omega_p t]$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{2k\pi} \sin \left[2k \frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos(2k\omega_p t)$$

On voit que le pseudo-développement en série de Fourier reconstitue bien l'onde MLI obtenue pour P_j .



ANALYSE DU PSEUDO DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER

Question 3

Le pseudo-développement en série de Fourier de P_j est égal à

$$P_j(t) \simeq \frac{U}{2} P_{jw}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{2U}{(2j-1)\pi} \cos \left[(2j-1) \frac{\pi}{2} P_{jw}(t) \right] \cos[(2j-1)\omega_p t]$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{2k\pi} \sin \left[2k \frac{\pi}{2} P_{jw}(t) \right] \cos(2k\omega_p t)$$

Chaque composante de ce développement a une "amplitude" qui varie en fonction du temps. Ainsi, si $P_j = \tau \sin(\omega t + \theta_0)$, on a :

$$P_j(t) \simeq r \frac{U}{2} \sin \omega t + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{2U}{(2j-1)\pi} \cos \left[(2j-1) \frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos[(2j-1)\omega_p t] \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{2k\pi} \sin \left[2k \frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos(2k\omega_p t)$$

- La "valeur moyenne" de P_j a une amplitude

$$r \frac{U}{2} \sin(\omega t + \theta_0)$$

Elle suit la valeur de référence.

Ceci confirme l'affirmation que "avec une commande MLI, le potentiel P_1 suit en moyenne sa valeur de référence P_{1w} ".

- Le terme de pulsation $\omega_p t$ à la fréquence de la porteuse s'écrit :

$$\frac{2U}{\pi} \cos \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos \omega_p t$$

Montrez que la variation de son "amplitude" en fonction du temps fait qu'au lieu d'une raie harmonique à la pulsation ω_p on a une famille de raies de pulsation $\omega_p, \omega_p \pm 2\omega, \omega_p \pm 4\omega, \dots$

Aide

Pour démontrer cela, il suffit de remplacer l'amplitude $\cos[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0)]$ par son développement en série de Taylor

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] = 1 - \frac{1}{2!} \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right]^2 + \frac{1}{4!} \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right]^4 \dots$$

puis d'exprimer $\sin^2(\omega t + \theta_0)$, $\sin^4(\omega t + \theta_0)$, ... en fonction de $\cos 2\omega t$, $\cos 4\omega t$, ...

$$\sin^2(\omega t + \theta_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \theta_0) \\ \sin^4(\omega t + \theta_0) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \theta_0) + \frac{1}{8} \cos 4(\omega t + \theta_0) \\ \dots$$

Réponse

$$\frac{2U}{\pi} \cos \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right] \cos \omega_p t \\ = \frac{2U}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2!} \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right]^2 + \frac{1}{4!} \left[\frac{\pi}{2} r \sin(\omega t + \theta_0) \right]^4 \dots \right\} \cos \omega_p t \\ = \frac{2U}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{4} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \theta_0) \right] + \frac{\pi^4 r^4}{4! 16} \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \theta_0) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{8} \cos 4(\omega t + \theta_0) \right] + \dots \right\} \cos \omega_p t$$

En regroupant dans le facteur qui multiplie $\cos \omega_p t$ les termes constants, les termes en $\cos 2\omega t$, les termes en $\cos 4\omega t$, ... on a :

$$\begin{aligned}
\frac{2U}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{2}r \sin(\omega t + \theta_0)\right] \cos \omega_p t &= \frac{2U}{\pi} \left[1 - \frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{8} + \frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{16} \dots\right] \cos \omega_p t \\
&+ \frac{2U}{\pi} \left[\frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{8} - \frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{32} \dots\right] \cos 2(\omega t + \theta_0) \cos \omega_p t \\
&+ \frac{2U}{\pi} \left[\frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{128} \dots\right] \cos 4(\omega t + \theta_0) \cos \omega_p t \dots
\end{aligned}$$

Comme $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$, il vient finalement :

$$\begin{aligned}
&\frac{2U}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{2}r \sin(\omega t + \theta_0)\right] \cos \omega_p t \\
= &\frac{2U}{\pi} \left[1 - \frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{8} + \frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{16} \dots\right] \cos \omega_p t \\
&+ \frac{2U}{\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2!} \frac{\pi^2 r^2}{8} - \frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{32} \dots\right] [\cos[(\omega_p - 2\omega - 2\theta_0)t] + \cos[(\omega_p - 2\omega + 2\theta_0)t]] \\
&+ \frac{2U}{\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4!} \frac{\pi^4 r^4}{128} + \dots\right] [\cos[(\omega_p - 4\omega - 4\theta_0)t] + \cos[(\omega_p - 4\omega + 4\theta_0)t]] \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

Le terme de pulsation ω_p et d'amplitude $\cos[\frac{\pi}{2}r \sin(\omega t + \theta_0)]$ est donc bien équivalent à un ensemble de raies :

- une de pulsation ω_p
- deux de pulsations $\omega_p - 2\omega$ et $\omega_p + 2\omega$ ayant toutes les deux la même amplitude
- deux de pulsations $\omega_p - 4\omega$ et $\omega_p + 4\omega$ ayant toutes les deux la même amplitude
- ...

Les amplitudes des raies décroissent rapidement à mesure que leur pulsation s'écarte de la pulsation ω_p .

- Par un calcul similaire, on montre que le terme de pulsation $2\omega_p$ du pseudo développement en série de Fourier

$$-\frac{2U}{2\pi} \sin[\pi r \sin(\omega t + \theta_0)] \cos(2\omega_p t)$$

donne :

- deux raies de pulsations $2\omega_p - \omega$ et $2\omega_p + \omega$ ayant toutes les deux la même amplitude
- deux raies de pulsations $2\omega_p - 3\omega$ et $2\omega_p + 3\omega$ ayant toutes les deux la même amplitude
- ...

Les harmoniques se groupent en famille situées autour des pulsations $\omega_p, 2\omega_p, 3\omega_p, \dots$