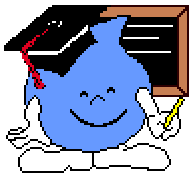
ECOULEMENT UNIFORME : LECON 3 : CALCUL DU REGIME UNIFORME

[IMAGES MANQUANTES]

Objectifs

La leçon précédente nous a permis d'établir l'équation de l'écoulement uniforme ou équation de Chézy. Nous allons maintenant voir comment utiliser pratiquement cette équation. Mais avant de passer au calcul du régime uniforme proprement dit, attachons nous à voir comment établir les données dont nous avons besoin.

Théorie



Etablissement des données

Rugosité

La détermination de la rugosité se fait en fonction du revêtement des berges et du fond en utilisant soit le coefficient *m* et la table de valeur (succincte) de Bazin, soit le coefficient de Manning *n* et sa table de valeurs très complète.

[Lecon_II_1/Tableau_n.htm]

Si nous préférons utiliser la formule de Chézy, nous pouvons calculer le coefficient *C* à partir de *m* ou *n* et du rayon hydraulique.

Par exemple, pour le canal ci-contre : canal semi-circulaire en béton lisse et en bon état, nous prendrons un *n* de Manning valant : 0.011 $m^{-1/3}$ s

Pente de fond S_0

La pente de fond, dans le cas de rivières naturelles est déterminée, par exemple, par levés topographique ou par bathymétrie.

Représentation des sections et calcul du rayon hydraulique

Les sections, même les plus complexes, sont en général ramenées à une forme polygonale simplifiée afin de permettre un calcul aisé du rayon hydraulique. Nous verrons dans les exercices à choix multiples et numériques divers exemples de calculs de rayons hydrauliques.

De plus, si la section est hétérogène ou composée, nous travaillerons avec un coefficient de rugosité équivalent. Nous verrons à la leçon 4 comment procéder.

Détermination du débit à partir de hu

Calcul du débit en fonction de la profondeur dans un canal donné

Supposons un canal donné. On connaît :

- la forme du canal, et donc la relation entre la profondeur d'eau *h*, l'aire mouillée *A* et le périmètre mouillé *P*;
- la pente de fond S_0 du canal;
- le matériau qui constitue le fond et les rives du canal, pour lequel on peut trouver la valeur appropriée de la rugosité, par exemple sous la forme de la rugosité *n* de Manning.

Si on connaît la profondeur *h*, on peut donc calculer la section mouillée *A*, le périmètre mouillé *P* et en déduire le rayon hydraulique : XXXX

Le débit est alors calculé à partir de la formule de Manning : XXXX

Ainsi dans le cas d'une section trapézoïdale de largeur au plafond *l* et de pente de talus p :

XXXX

L'aire mouillée vaut la somme d'un rectangle et de deux triangles, soit : XXXX

et le périmètre mouillé vaut la largeur au plafond plus la longueur des talus, ceux-ci étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle : XXXX

Ces valeurs introduites dans l'équation de Manning, écrite sous la forme : XXXX

mènent directement à la solution.

Détermination de S0

Calcul de la pente de fond connaissant le débit et la profondeur d'eau dans un canal de forme donnée

Ce problème peut se poser par exemple dans le cas de petits canaux d'irrigation, montés sur piles, de telles sortes que la topographie du terrain n'impose pas strictement une pente donnée. Dans le cas de canaux plus grands creusés dans le terrain naturel, on possède également un degré de liberté sur la pente, puisqu'il est toujours possible de s'écarter de la direction de la plus grande pente du terrain pour éviter des pentes et donc des vitesses excessives.

Le calcul de la pente de fond à donner à un canal de forme donnée pour un débit donné et une profondeur d'eau donnée se déduit de la formule de Manning :

XXXX

où l'aire mouillée *A*, le périmètre mouillé *P* et le rayon hydraulique *R* se calculent comme précédemment en fonction de la profondeur d'eau.

Détermination de n ou m

Calcul du coefficient de rugosité à partir de mesures in situ

Si on a l'occasion de jauger un canal et si l'on constate que, sur une certaine longueur, la pente de la ligne d'eau et la pente de fond sont plus ou moins égales, et donc que le régime est sensiblement uniforme, on peut, en mesurant le débit *Q* et la profondeur d'eau *h*, en déduire par exemple le

coefficient *n* de Manning : XXXX

où *A* et *R* se calculent à partir de la profondeur d'eau *h*.
La valeur de la rugosité ainsi calculée pourra être utilisée, comme nous le verrons plus loin, pour le calcul du mouvement uniforme ou varié dans ce tronçon du canal, pour autant que les conditions d'écoulement soient à peu près les mêmes que dans le cas de la mesure (donc pas pour des grands débits par exemple, si la mesure a été effectuée pour de petits débits).

Détermination de la section mouillée

Calcul de la section et de la profondeur d'eau, pour un débit et une pente de fond donnés

Dans le cas, deux degrés de liberté sont offerts : la forme de la section (du moins la largeur au plafond) et la profondeur d'eau. La présence de deux paramètres rend possible la recherche d'une solution optimale. Cette recherche sera exposée à la leçon 5.
[lecon_II_4]

Détermination de hu

Calcul de la profondeur uniforme dans un canal donné pour un débit donné

C'est finalement ce calcul-ci qui est le plus fréquent ! Le canal (ou le cours d'eau) existe et donc ses attributs sont connus :

- la forme de la section,
- la rugosité, par exemple sous la forme du coefficient de Manning *n*.

L'aire mouillée *A*, le périmètre mouillé *P*, le rayon hydraulique *R* ne sont pas connus puisque la profondeur d'eau *h* est inconnue, mais les relations qui lient *A*, *P* et *R* à *h* peuvent être déterminées puisque la forme de la section est connue.

Un certain débit *Q* se présente dans le canal, et on cherche le tirant d'eau qui sera nécessaire pour évacuer ce débit en régime uniforme, soit h_u. La profondeur $\boldsymbol{h_u}$ est ce que l'on appelle la **profondeur uniforme** ou profondeur normale

Ce calcul est plus compliqué que les précédents car l'équation de Manning XXXX

devient irrationnelle, car tant *A* que *P* sont des fonctions - parfois compliquées - de l'inconnue *h*. Le problème doit donc être résolu graphiquement ou itérativement.

Sections ouvertes

Généralement, les sections des canaux sont ouvertes, c'est-à-dire que la surface de l'eau est à l'air libre. Ces sections présentent, en général, une croissance plus rapide de leur aire A que de leur périmètre mouillé P quand le tirant d'eau h augmente. Le rayon hydraulique

XXXX

est donc une fonction monotone croissante de h et donc aussi le débit

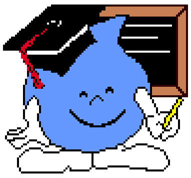
XXXX

Pour un débit Q dans un canal donné, il n'existe donc qu'une seule profondeur uniforme h_u assurant un écoulement uniforme.

Section définie analytiquement

Si la section est définie analytiquement, on connait les expressions liant A et P à la profondeur d'eau h. La résolution peut alors se faire de façon itérative. Les étapes suivantes permettront d'arriver au résultat :

1. Détermination des équations donnant A et P en fonction de h,
2. Remplacement dans la formule de Manning des termes A et P par les équations trouvées au point 1,
3. Transformation de l'équation obtenue au point 2, pour en obtenir une du type h = f(h),
4. Résolution itérative en s'imposant une première valeur de h dans le membre de droite, calcul d'une nouvelle valeur de h dans le membre de gauche, que l'on réinjecte dans le membre de droite et ainsi de suite, jusqu'à convergence sur la valeur de h, convergence qui est en général assez rapide.



Vous trouverez un exemple de la démarche décrite ci-dessus pour le cas d'une section trapézoïdale en cliquant sur le lien proposé. La page "illustrations" propose un exemple d'application numérique pour une section trapézoïdale. Vous pourrez trouver également une application interactive de calcul de la hauteur uniforme dans une section trapézoïdale variable. (Attention, il vous faut un navigateur supportant le Java pour cette dernière application).

Section non définie analytiquement

Si la section n'est pas définie analytiquement, mais par exemple par une polygonale, il est toujours possible de trouver A et P pour une profondeur d'eau h donnée, mais l'estimation de ces valeurs se fait par approche numérique. Le calcul s'opère cette fois par essais et erreurs, en essayant diverses valeurs de h jusqu'à ce que la relation

XXXX

soit satisfaite.

Sections fermées

Dans le cas de sections fermées (comme un égout par exemple), la hauteur uniforme h_u peut ne plus être une fonction univoque de Q. Dans le collecteur figuré ci-dessous, quand le niveau de l'eau approche la génératrice supérieure de la conduite, l'aire mouillée n'augmente presque plus, alors que le périmètre mouillé s'accroît de manière substantielle. Au lieur d'augmenter, le rayon hydraulique

XXXX

peut diminuer pour une valeur croissante de h et donc aussi le débit

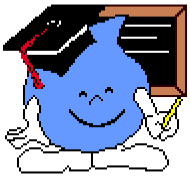
XXXX

Dans les environs du débit plein, deux hauteurs uniformes sont possibles pour le même débit.

XXXX

On peut montrer que, dans le cas d'un l'aqueduc circulaire de diamètre D, le débit est maximum pour h_u = 0,95.D et vaut 1.07 fois le débit plein non en charge, c'est-à-dire le débit correspondant à une ligne d'eau coïncidant avec la génératrice supérieure de la conduite, mais sans mise sous pression.

Exemples et illustrations



Cette page vous présente un exemple de résolution numérique de la recherche de la hauteur d'eau pour un débit donné. Nous vous suggérons vivement de programmer dans votre calculatrice la formule itérative donnant la hauteur d'eau uniforme h_u. Le calcul de cette hauteur uniforme sera en effet un préalable pour toutes les applications numériques ultérieures.

Données du problème

Supposons un canal trapézoïdal dont :

- la géométrie est connue : largeur du plafond l = 25 m et pente des berges p = 8/4 ;
- la pente de fond S_0 est connue : 0,20 % ;
- la rugosité n de Manning peut être considérée égale à 0,014, puisqu'il s'agit d'un canal revêtu de béton dont les parois sont en assez bon état (voir tableau des rugosité de Manning).

On demande la profondeur h_u nécessaire pour faire passer dans ce canal un débit Q de 300 m^3/s.

Etapes de la résolution

1. Détermination des équations donnant A et P en fonction de h

Nous l'avons vu, dans la cas d'une section trapézoïdale de largeur au plafond l et de pente de talus :

l'aire mouillée vaut la somme d'un rectangle et de deux triangles, soit :

et le périmètre mouillé vaut la largeur au plafond plus la longueur des talus, ceux-ci étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle :

2. Remplacement dans la formule de Manning des termes A et P par les équations trouvées

Ces valeurs introduites dans l'équation de Manning, écrite sous la forme :

mènent à la relation :

3. Transformation de l'équation obtenue pour obtenir une équation du type h = f(h)

Dans l'équation ci-dessus, l'inconnue h apparaît à trois endroits : deux fois au numérateur et une fois au dénominateur. Il est clair que le terme le plus sensible, c'est-à-dire celui qui influencera le plus le débit est celui où h est en facteur avec l'exposant 5/3. C'est donc ce terme que l'on choisira d'isoler dans le premier membre sous la forme :

4. Résolution itérative en s'imposant une première valeur de h

On introduit une estimation de la profondeur uniforme dans le second membre et on en déduit la valeur du premier membre. Ce dernier, ramené à l'exposant 3/5, nous donne une nouvelle valeur de *h*, que l'on introduit dans le second membre, et ainsi de suite, jusqu'à ce que *h* ne change pratiquement plus. La valeur de convergence de *h* est la valeur recherchée de la profondeur uniforme h_u.

Prenez comme h de départ une estimation réaliste de la hauteur d'eau...(par exemple 4 m). Pour rappel : $Q = 300\ m^3$, $n = 0{,}014\ m^{-1/3}s$, $S_0 = 0{,}2\ \%$, $l = 25m$.
Entrez la valeur dans le cadre et cliquez à côté, si votre calcul est incorrect, un message vous avertira...

Vous trouvez, après une première itération : h = m.

Vous trouvez, après la deuxième itération : h = m.

Vous trouvez après la troisième itération : h = m.

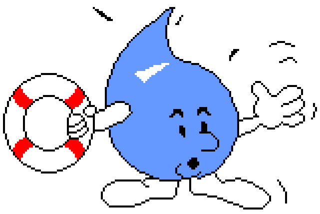
Vous trouvez, après la quatrième itération : h = m.

Vous concluez que la hauteur uniforme dans ce canal vaut : h = m.

Quelques questions à choix multiples et exercices de classement permettront de mettre en pratique tous ces éléments... NB : ne négligez pas les derniers exercices, pour lesquels vous aurez à réaliser quelques calculs.

Questions théoriques

Pour commencer, choisissez un numéro de question en cliquant sur l'un des boutons ci-dessous. Vous pouvez demander votre score à tout moment (bouton "%"). Quand un bouton apparaît grisé, c'est que vous avez déjà répondu correctement à la question correspondante.



1) Soit un canal rectangulaire en régime uniforme, à hauteur d'eau constante, si le coefficient de rugosité de Manning double, le nouveau débit Q_2 vaut, par rapport à l'ancien débit Q_1 :

- [ ] $Q_2 > Q_1$
- [ ] $Q_2 = Q_1$
- [ ] $Q_1 > Q_2 > Q_1/2$
- [x] $Q_2 = Q_1/2$
- [ ] $Q_2 < Q_1/2$

Reprenons l'équation de Manning écrite sous la forme :

$$\boxed{Q = AV = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}}$$

Nous voyons bien que si le coefficient de Manning n double, le débit Q est divisé par 2 !

2) Soit un canal rectangulaire en régime uniforme, à hauteur d'eau constante, si la pente de fond double, le nouveau débit Q_2 vaut, par rapport à l'ancien débit Q_1 :

- [ ] $Q_2 = 0.5\ Q_1$
- [ ] $Q_2 = 0.785\ Q_1$
- [ ] $Q_2 = Q_1$
- [x] $Q_2 = 1.412\ Q_1$
- [ ] $Q_2 = 2\ Q_1$

Reprenons l'équation de Manning écrite sous la forme :

$$\boxed{Q = AV = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}}$$

Nous voyons bien que si la pente de fond S_0 double, le débit Q est multiplié par $2^{1/2}$, soit 1,412 !

3) Soit un canal rectangulaire en régime uniforme, à débit constant, si la pente de fond augmente,

- [x] la hauteur uniforme diminue
- [ ] la hauteur uniforme reste la même
- [ ] la hauteur uniforme augmente

Reprenons la formule de Manning :

$$\boxed{Q = AV = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}}$$

A débit constant, l'on voit bien que si S_0 augmente, $AR^{2/3}$ diminue et donc h diminue. De plus il est assez "intuitif" que si la pente de fond augmente, la hauteur de la lame d'eau diminue...

4) Soit un canal rectangulaire en régime uniforme, à débit constant, si le coefficient de rugosité de Manning augmente,

- [ ] la hauteur uniforme diminue
- [ ] la hauteur uniforme reste la même
- [x] la hauteur uniforme augmente

Reprenons la formule de Manning :

$$\boxed{Q = AV = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}}$$

A débit constant, l'on voit bien que si n augmente, $AR^{2/3}$ doit augmenter et donc h augmente. De plus il est assez "intuitif" que si la rugosité augmente, la hauteur de la lame d'eau augmente également...

5) Pour augmenter le débit dans un canal, sans modifier la hauteur d'eau, on peut :

- [x] élargir le canal
- [ ] rétrécir le canal
- [ ] augmenter la rugosité
- [x] diminuer la rugosité
- [x] augmenter la pente
- [ ] diminuer la pente

Pour une hauteur d'eau constante, la formule de Manning :

$$\boxed{Q = AV = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}}$$

indique que le débit sera plus élevé si le canal est plus large, moins rugueux ou plus en pente...

6) Pour réduire la hauteur d'eau dans un canal, à débit constant, on peut :

- [x] élargir le canal
- [ ] rétrécir le canal
- [ ] augmenter la rugosité
- [x] diminuer la rugosité
- [x] augmenter la pente
- [ ] diminuer la pente

Pour une hauteur d'eau constante, la formule de Manning :

$$\boxed{Q = AV = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}}$$

indique que la hauteur d'eau sera d'autant plus faible que le canal est large, la rugosité est faible, la pente est élevée...

7) Quand une rivière naturelle permettra-t-elle généralement le passage du plus grand débit pour une même hauteur d'eau ?

- [ ] en été
- [x] en hiver

En hiver, la végétation étant moins importante, la rugosité de la rivière diminue, le débit est donc plus grand pour une même hauteur d'eau.

8) Soit un canal de section rectangulaire, de profondeur h=2m, pour quelle largeur l le débit par unité de largeur sera-t-il le plus important ?

- [ ] 1 m
- [ ] 2 m
- [ ] 10 m
- [ ] 20 m
- [x] 100 m

Si la largeur du canal augmente, le rayon hydraulique augmente également, et vu l'équation de Manning : $\boxed{Q = AV = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}}$

le débit augmente également...

9) Le 14 janvier 1993, on a mesuré, dans la Meuse à Ampsin-Neuville, un débit de 1510 m^3/s et une hauteur d'eau de 7,1m. A cet endroit, la Meuse a une section approximativement rectangulaire, d'une largeur de 150m et une pente de fond de S_0=0,01%.

- [x] le coefficient de Manning vaut 0,0245 $m^{-1/3}s$
- [ ] le coefficient de Manning vaut 0,0261 $m^{-1/3}s$
- [ ] le coefficient de Manning vaut 0,0457 $m^{-1/3}s$
- [ ] le coefficient de Manning vaut 0,245 $m^{-1/3}s$
- [ ] le coefficient de Manning vaut 0,261 $m^{-1/3}s$

En utilisant la formule de Manning dans laquelle il faut isoler n : $\boxed{Q = AV = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}}$

On trouve n = 0,0245 $m^{-1/3}s$ puisque A=150m x 7,1 m = 1065 m^2 et R = A/P = 1065/164,2 = 6,486 m.

10) Le 10 janvier 1994, la hauteur d'eau dans la Meuse à Ampsin-Neuville a atteint h=5,54m. A cet endroit l=150m, S_0=0,01% et n=0,0245$m^{-1/3}s$ (calculée à l'exercice précédent). Que valait le débit ce jour là ?

- [x] 1013 m^3/s
- [ ] 1062 m^3/s
- [ ] 1750 m^3/s
- [ ] 1879 m^3/s
- [ ] 10130 m^3/s

En utilisant la formule de Manning : $\boxed{Q = AV = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2}}$
On trouve Q = 1013 m^3/s puisque A=831 m^2 et R = A/P = 5,16 m.

11) Le 31 janvier 1995, le débit attendu dans la Meuse à Ampsin-Neuville était de 2192 m^3/s. A cet endroit l=150m, S_0=0,01% et n=0,0245$m^{-1/3}s$. Quelle était la hauteur d'eau ce jour ?

- [ ] 5,16 m
- [ ] 8,59 m
- [ ] 8,79 m
- [x] 8,95 m
- [ ] 9,29 m

En utilisant la méthode de calcul de la hauteur uniforme, on trouve h=8,95 m

12) Que vaut le débit plein non en charge d'un collecteur circulaire de diamètre d=30cm, en béton (n=0,014 $m^{-1/3}s$), avec une pente S_0=0,5%.

- [ ] 0,0268 m^3/s
- [ ] 0,101 m^3/s
- [ ] 0,403 m^3/s
- [x] 0,0635 m^3/s

Pour une section circulaire, nous le recalculerons dans la leçon 5, le rayon hydraulique vaut la moitié du rayon du cercle (soit donc 15cm). Par la formule de Manning :

$$\boxed{Q = AV = \frac{1}{n}\, A\, R^{2/3}\, S_0^{1/2}}$$

on trouve **Q=0,0635** m^3/s.

Exercices

Pour commencer, choisissez un numéro de question en cliquant sur l'un des boutons ci-dessous.

Exercice 1 : Soit un canal de géométrie et de tirant d'eau donnés. Classez les revêtements suivants du plus petit au plus grand débit obtenu en écoulement uniforme.

1) Broussailles
2) Pierailles
3) Herbe
4) Béton

Exercice 2 : Soit un canal de géométrie donnée avec un débit constant, classez les revêtements suivants de la plus petite à la plus grande hauteur d'eau obtenue en écoulement uniforme.

1) Asbeste ciment
2) Béton
3) Maçonnerie
4) Herbages

ANNEXE : Calcul de la profondeur uniforme dans une section trapézoïdale

Données du problème

Supposons un canal trapézoïdal donné. On connaît :

- la géométrie du canal (largeur du plafond *l* et pente des berges *p*), et donc la relation entre la profondeur d'eau *h*, l'aire mouillée *A* et le périmètre mouillé *P*;
- la pente de fond S_0 du canal;
- le matériau qui constitue le fond et les rives du canal, pour lequel on peut trouver la valeur appropriée de la rugosité, par exemple sous la forme de la rugosité *n* de Manning.

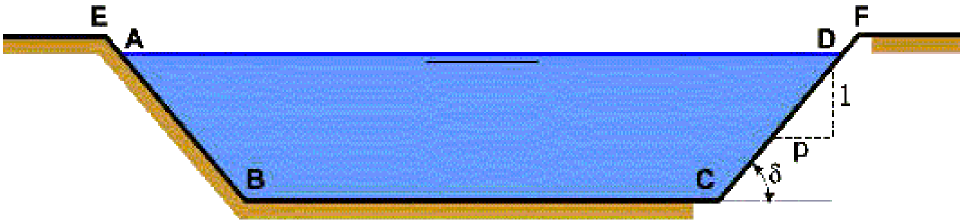
On demande la profondeur h_u nécessaire pour faire passer dans ce canal un débit donné *Q*.

Etapes de la résolution

1. Détermination des équations donnant A et P en fonction de h

Dans le cas d'une section trapézoïdale de largeur au plafond *l* et de pente de talus :

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{p}$$



l'aire mouillée vaut la somme d'un rectangle et de deux triangles, soit :

$$A = h\,(l + p\,h)$$

et le périmètre mouillé vaut la largeur au plafond plus la longueur des talus, ceux-ci étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle :

$$P = l + 2h\sqrt{1+p^2}$$

2. Remplacement dans la formule de Manning des termes A et P par les équations trouvées

Ces valeurs introduites dans l'équation de Manning, écrite sous la forme :

$$Q = \frac{1}{n}\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}S_0^{1/2}$$

mènent à la relation :

$$Q = \frac{1}{n}\frac{h^{5/3}\,(l+p\,h)^{5/3}}{\left(l+2h\sqrt{1+p^2}\right)^{2/3}}S_0^{1/2}$$

3. Transformation de l'équation obtenue pour obtenir une équation du type h = f(h)

Dans l'équation ci-dessus, l'inconnue *h* apparaît à trois endroits : deux fois au numérateur et une fois au dénominateur. Il est clair que le terme le plus sensible, c'est-à-dire celui qui influencera le plus le débit est celui où *h* est en facteur avec l'exposant 5/3. C'est donc ce terme que l'on choisira d'isoler dans le premier membre sous la forme :

$$h^{5/3} = \frac{Q\,n}{S_0^{1/2}}\frac{\left(l+2h\sqrt{1+p^2}\right)^{2/3}}{(l+p\,h)^{5/3}}$$

4. Résolution itérative en s'imposant une première valeur de h

On introduit une estimation de la profondeur uniforme dans le second membre et on en déduit la valeur du premier membre. Ce dernier, ramené à l'exposant 3/5, nous donne une nouvelle valeur de *h*, que l'on introduit dans le second membre, et ainsi de suite, jusqu'à ce que *h* ne change pratiquement plus. La valeur de convergence de *h* est la valeur recherchée de la profondeur uniforme h_u.