UCLouvain

lmat1235

*2017*

# Notions de logique mathématique

| 5 crédits | 30.0 h + 15.0 h | Q2 |
|---|---|---|

| | |
|---|---|
| Enseignants | Verdée Peter ; |
| Langue d'enseignement | Français |
| Lieu du cours | Louvain-la-Neuve |
| Préalables | LMAT1121, LMAT1131 |
| Thèmes abordés | On commence avec un point de vue naïf sur les ensembles. Dans ce cadre on introduit les ordinaux et les cardinaux, et on en développe une théorie élémentaire qui montre très clairement que ce point de vue naïf n'est pas tenable.<br>On aborde alors la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo et Fraenkel. On s'intéresse particulièrement aux problèmes d'indépendance et d'(in)cohérence, prenant comme exemples particuliers l'axiome du choix et l'hypothèse du continu.<br>En parallèle on donne une base du calcul des propositions et des prédicats, c'est-à-dire des structures et langages du premier ordre, dont on a besoin pour bien comprendre les problème qui apparaissent dans la théorie des ensembles. |
| Acquis d'apprentissage | 1 Contribution du cours aux acquis d'apprentissage du programme de bachelier en mathématique. A la fin de cette activité, l'étudiant aura progressé dans sa capacité à:<br>- Connaitre et comprendre un socle fondamental des mathématiques. Il aura notamment développé sa capacité à:<br>-- Choisir et utiliser des méthodes et des outils fondamentaux de la logique pour résoudre des problèmes de formalisation en mathématique.<br>-- Reconnaître les concepts fondamentaux de certains théories mathématiques actuelles.<br>\item Etablir les liens principaux entre ces théories, les expliquer et les motiver par des exemples.<br>- Dégager, grâce à l'approche abstraite et expérimentale propre aux sciences exactes, les aspects unificateurs de situations et expériences différentes en mathématique.<br>- Faire preuve d'abstraction et esprit critique. Il aura notamment développé sa capacité à:<br>-- Raisonner dans le cadre de la méthode axiomatique.<br>-- Reconnaître les arguments clef et la structure d'une démonstration.<br>-- Construire et rédiger une démonstration de façon autonome.<br>-- Apprécier la rigueur d'un raisonnement mathématique et en déceler les failles éventuelles.<br><br>Acquis d'apprentissage spécifiques au cours. A la fin de cette activité, l'étudiant sera capable de:<br>- Raisonner dans le cadre de la logique des propositions et des prédicats, faire une déduction naturelle.<br>- Reconnaitre si un certain groupement d'objets est un ensemble.<br>- Utiliser la théorie des ordinaux et des cardinaux pour déterminer la taille d'un ensemble, et pour comparer les tailles de deux ensembles donnés.<br>- Utiliser l'induction transfinie et le lemme de Zorn.<br>- Comprendre le statut de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu dans le cadre des axiomes de Zermelo--Fraenkel et von Neumann--Bernays--Gödel.<br><br>- - - -<br>*La contribution de cette UE au développement et à la maîtrise des compétences et acquis du (des) programme(s) est accessible à la fin de cette fiche, dans la partie « Programmes/formations proposant cette unité d'enseignement (UE) ».* |
| Modes d'évaluation des acquis des étudiants | L'évaluation se fait sur base d'un examen écrit, à livre ouvert . On y teste la la compréhension des notions et des résultats fondamentaux, la capacité de construire et d'écrire un raisonnement cohérent, la maîtrise des techniques de la logique. |
| Méthodes d'enseignement | Les activité d'apprentissage sont constituées par des cours magistraux et des séances de travaux pratiques. Les cours magistraux visent à introduire les concepts fondamentaux, à les motiver en montrant des exemples et en établissant des résultats, à montrer leurs liens réciproques et leurs liens avec d'autres domaines mathématiques. Les séances de travaux pratiques visent à apprendre à appliquer les techniques de base vues dans la partie théorique du cours. |

| | |
|---|---|
| Contenu | Cette activité vise à expliciter les lois qui gouvernent le raisonnement mathématique au stade de la présentation comme théorie formalisée. On examine les particularités des langages utilisés, les propositions prises comme points de départ, les règles de déduction habituellement admises. Comme exemple on considère la théorie naïve des ensembles et ses formalisations (ZF) et (NBG) et l'arithmétique et ses formalisations (PA, RA).<br>On se focalise sur les limites de l'entreprise de formalisation, notamment sur l'impossibilité de garantir une rigueur définitive. L'esprit et la présentation sont du même type que pour un autre cours de mathématique: on donne des définitions, on construit des enchaînements de propositions, on démontre des théorèmes.<br>Les contenus suivants sont abordés dans le cadre du cours.<br>- La logique des propositions et des prédicats, sémantique et théorie de la démonstration<br>- Introduction à la théorie des ensembles: ordinaux et cardianux, ZF, NBG, l'axiome du choix, forcing<br>- Introduction à la théorie axiomatique de l'arithmétique (PA)<br>Incomplétude et indécidabilité |
| Ressources en ligne | Site iCampus (http://icampus.uclouvain.be/). Le site contient le syllabus du cours, les énoncés des exercices pour les séances de travaux pratiques et le plan détaillé du cours. |
| Bibliographie | R. David, K. Nour and C. Raffalli. Introduction à la logique: théorie de la démonstration: 2ème édition. Dunod, 2003.<br>P. Smith. An introduction to Gödel's theorems. Cambridge University Press, 2013<br>K. Hrbacek, K.T. Jech, Introduction to Set Theory, 3rd Edition, Marcel Dekker, 1999 |
| Faculté ou entité en charge: | MATH |

## Programmes / formations proposant cette unité d'enseignement (UE)

| Intitulé du programme | Sigle | Crédits | Prérequis | Acquis d'apprentissage |
|---|---|---|---|---|
| Approfondissement en sciences mathématiques | LMATH100P | 5 | | |
| Approfondissement en sciences mathématiques | TMATH100P | 5 | | |