Collège Saint-Michel

Professeur responsable : M. Bolly

Courbe de Watt

Par

Michaël Azzam, Céline Cerckel, Arnaud Erpicum,
Chloé Masson et Maxime Renaud

Congrès Dédra-math-isons, 22 avril 2009

BIENVENUE !

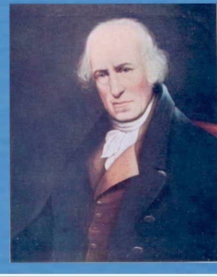
Courbe de Watt :

Chercher le lieu du milieu d'un bâton de longueur fixe, dont les extrémités se déplacent sur des cercles de même rayon dans un plan.

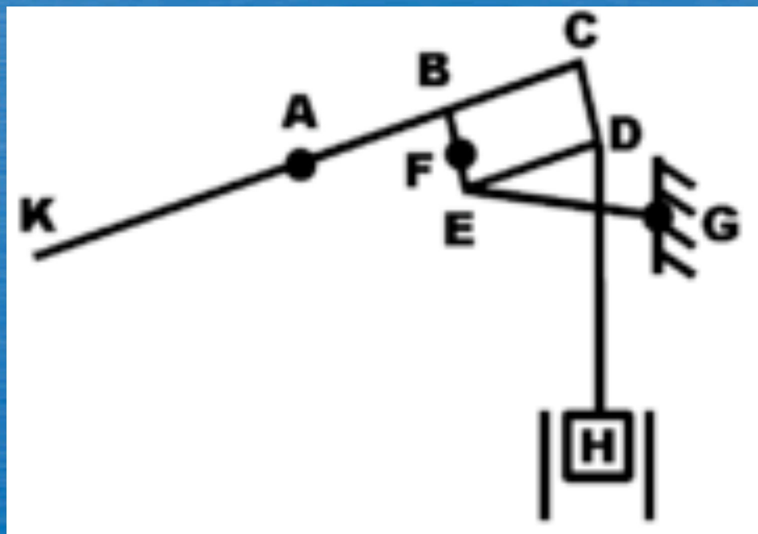
Enoncé

- Chercher le lieu du **milieu d'un bâton** de longueur fixe, dont les **extrémités** se déplacent sur des **cercles** de même rayon dans un plan

Un petit bout d'histoire …



- 1784 : James Watt : invention du moteur à vapeur.
  - Parallélogramme transmettant la poussée et maintenant le piston vertical.
  - BCDE maintient F droit => D= homothétie de F⇔A



Un petit bout d'histoire …

- Pour réduire les frottements et l'usure, il vaut mieux un mouvement rectiligne.
- Mais il est difficile de tracer une droite sans avoir déjà une droite (règle,…).
- => Nécessité de trouver un système : transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.

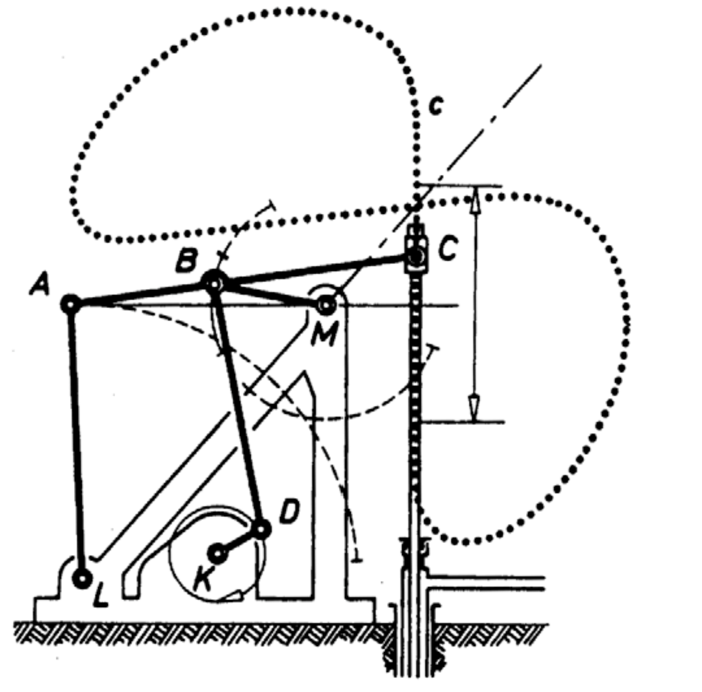


Abb. 63 Angenäherte Geradführung bei einer Ölpumpe.

APPROCHE ALGEBRIQUE

- 1. Conditions initiales
- 2. Généralisation

Conditions initiales

Posons

- L'interdistance entre les deux centres = 2a
- Le rayon des cercles = b
- La longueur du bâton = 2c

Valeurs extrêmes:

$$a-|b \leq |c \leq a+b$$

Lorsque c égale ces valeurs,

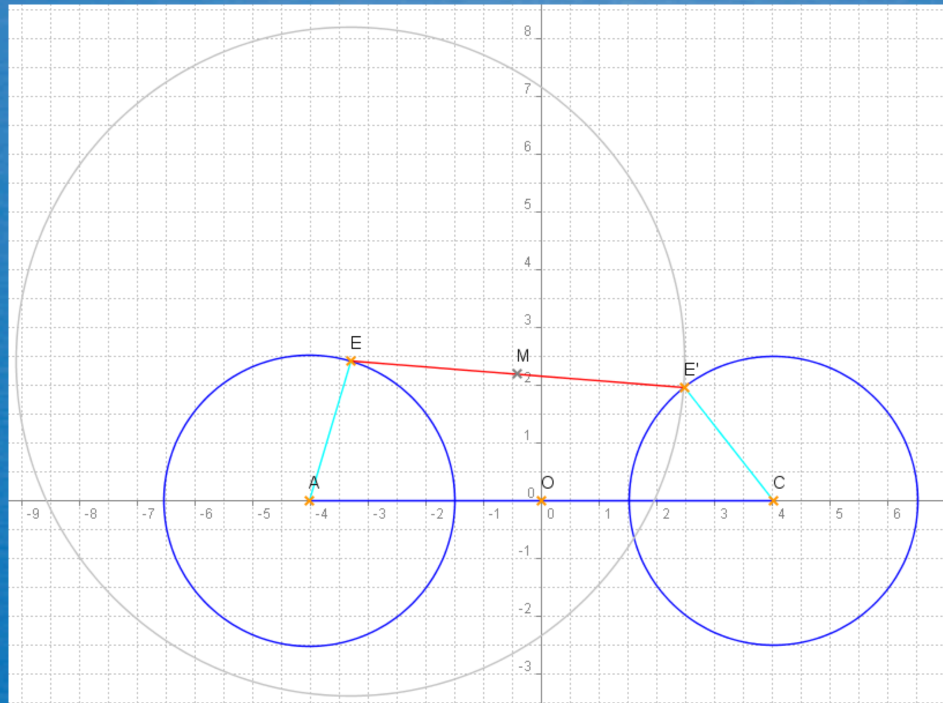
le lieu = l'unique point milieu du bâton

Généralisation

- Plan muni d'un repère orthonormé
- Comme M:{ $(X_e-X_{e'})/2$; $(Y_e-Y_{e'})/2$ }
  on exprime E' en fonction de E.
- $Y_{e'}=+/- \sqrt{4C^2 -(x +/- \sqrt{(b^2-y^2)}+a)^2}$
  $+/-\sqrt{\sqrt{b^2-x^2}+a(2x-a)}$

$\Rightarrow$La formule s'emballe très vite et devient inmaniable.

- Nous sommes forcés de
  changer de repère et de type de coordonnées.

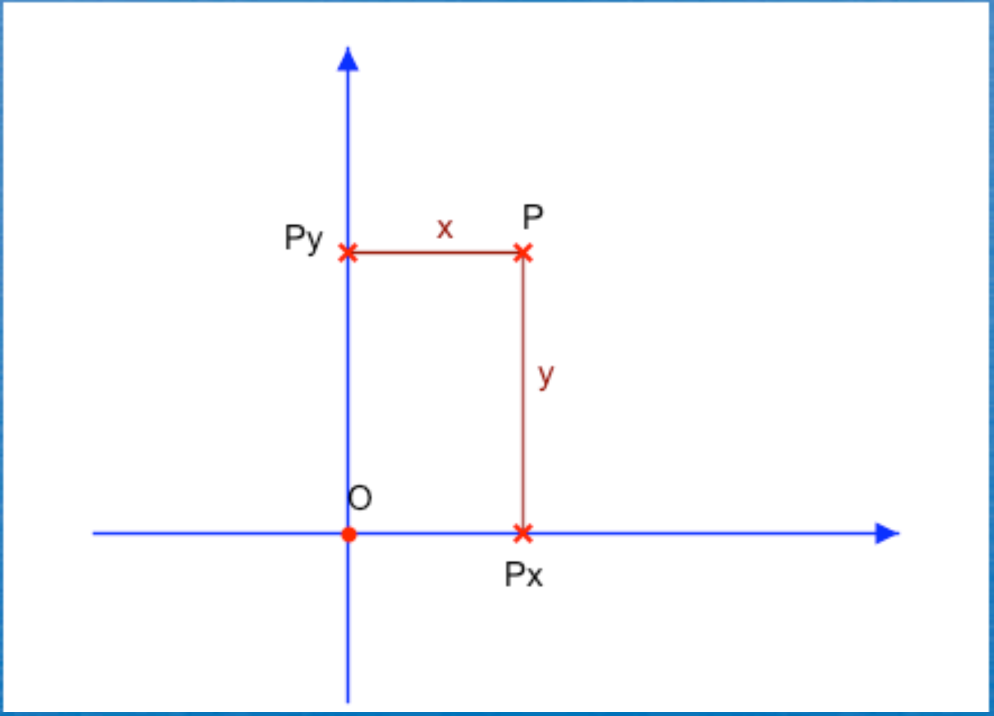


Coordonnées polaires

- Qu’est-ce que les coordonnées polaires ?
- Exemple
- Lien entre coordonnées polaires et cartésiennes

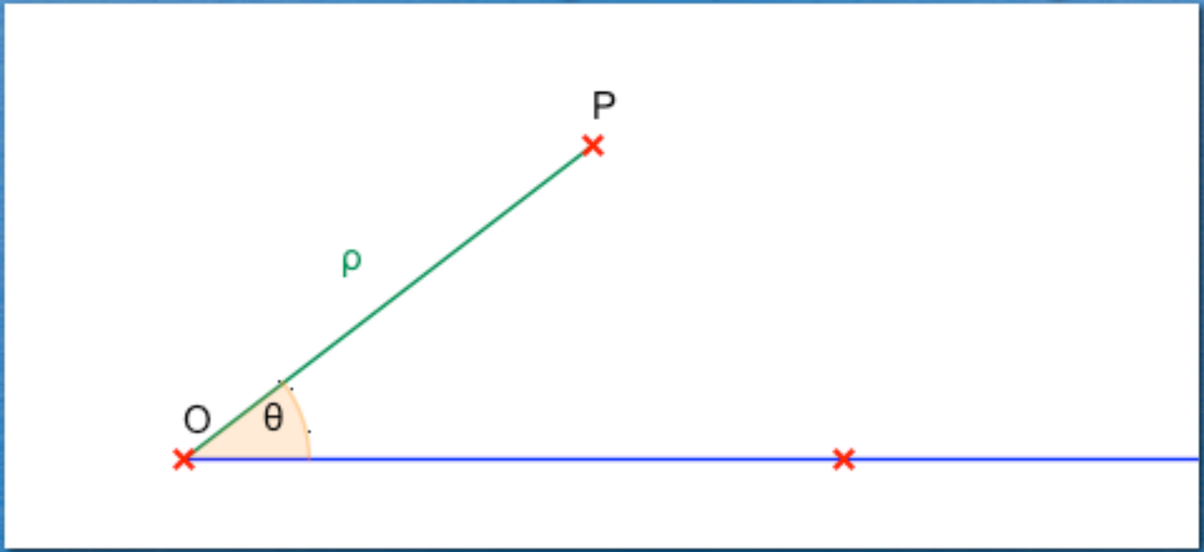
Système de coordonnées polaires

- Coordonnées → position d'un point P
  - › Cartésiennes : distance p/r à deux droites orthogonales => axes du repère



Système de coordonnées polaires

- Coordonnées → position d'un point P
  - › Polaires : distance algébrique $\overline{OP}$ et angle POx

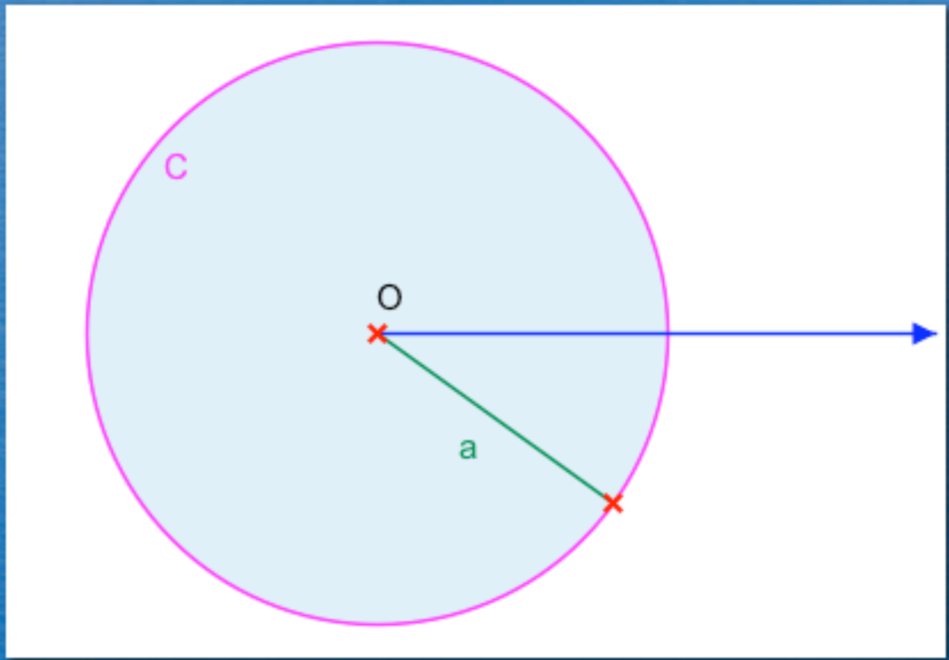


$*$ Un couple $(\rho\ ;\ \theta)$ → un seul point

Un point → une infinité de coordonnées

Système de coordonnées polaires

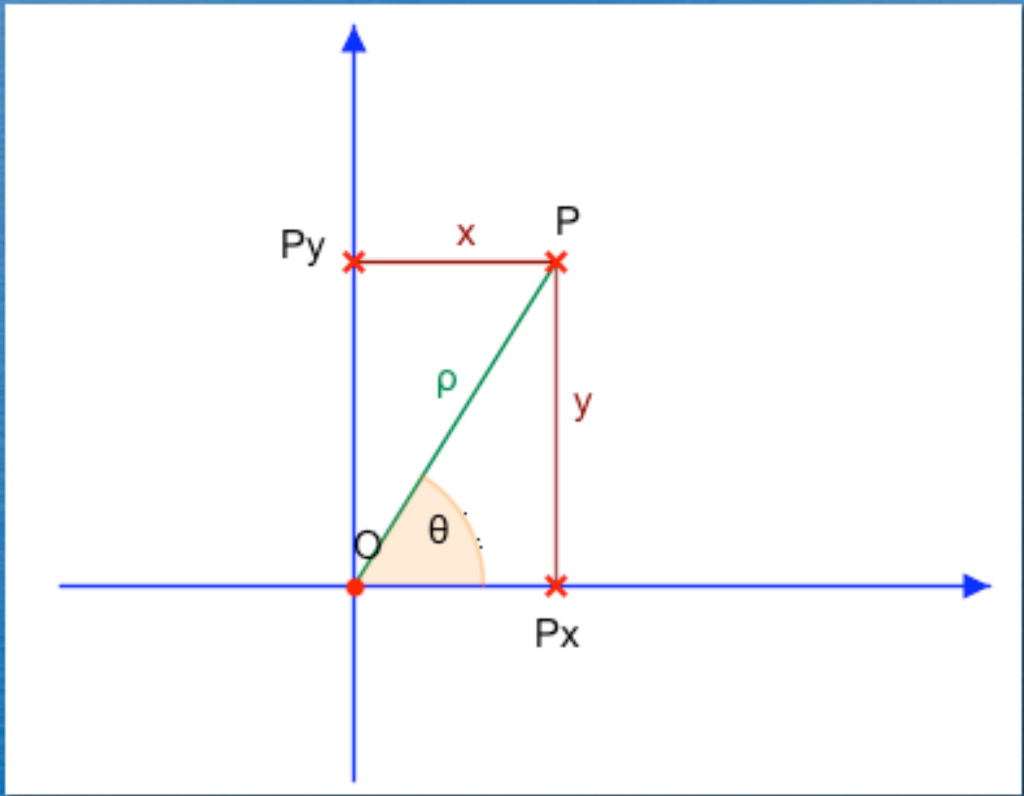
- Avantage : les courbes sont des fonctions !
  - Exemple : le cercle
    - $x^2 + y^2 = r^2$
    - $\rho = a$



Système de coordonnées polaires

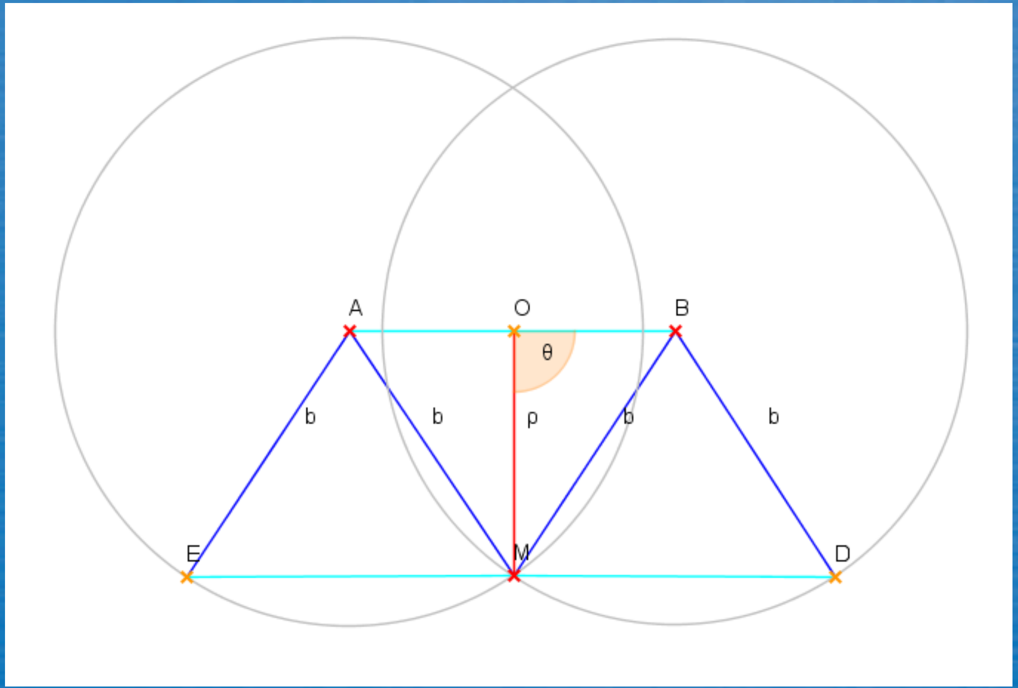
- Lien entre coordonnées polaires et cartésiennes

  $x = \rho \cos\theta$ $y = \rho \sin\theta$ $\rho^2 = x^2 + y^2$



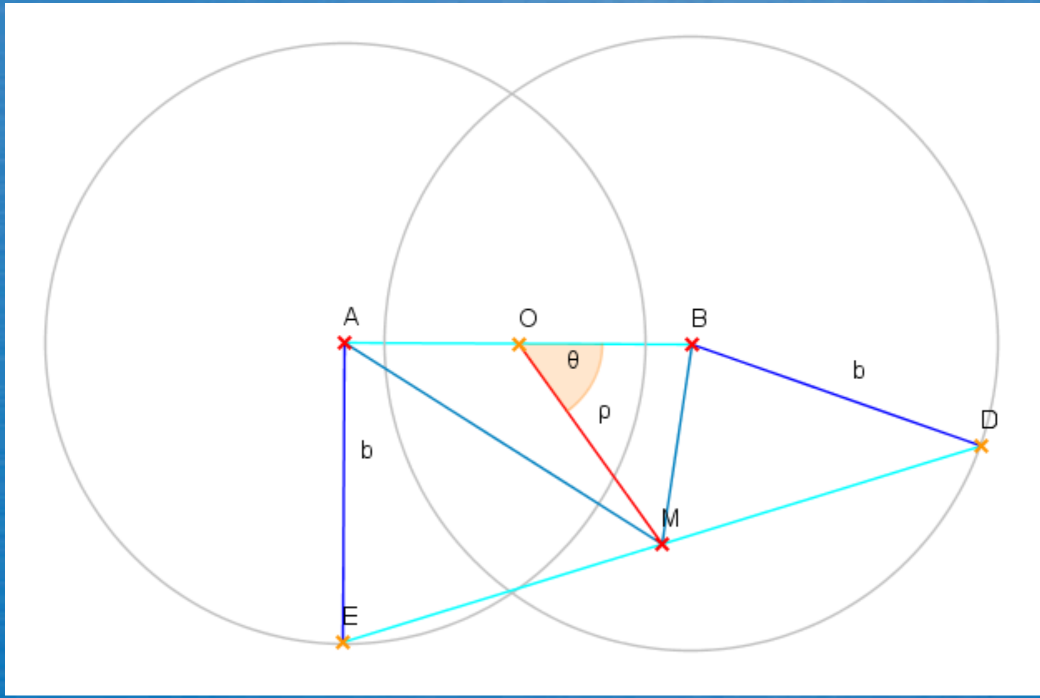
Situation particulière

- b=c+a
- Quand AB // ED =>trapèze
- $\theta=90°$
- AE=AM=MB=BD=b
- $\rho=\sqrt{b^2-(a/2)^2}$



Un quadrilatère articulé

- Quand ED se déplace
  => ρ=? , θ=?
- Pythagore inutile
- Reste un **quadrilatère articulé**
- On se sert de ce quadrilatère

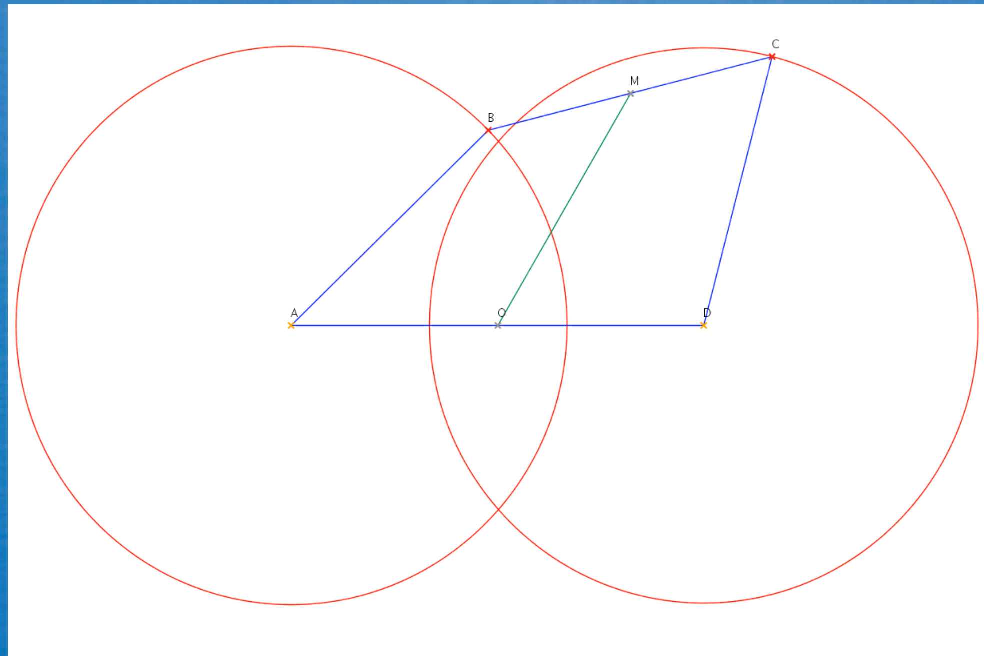


DEMONSTRATION

- Représentation
- Constructions
- Observations
- Posons
- Relations
- Traduction

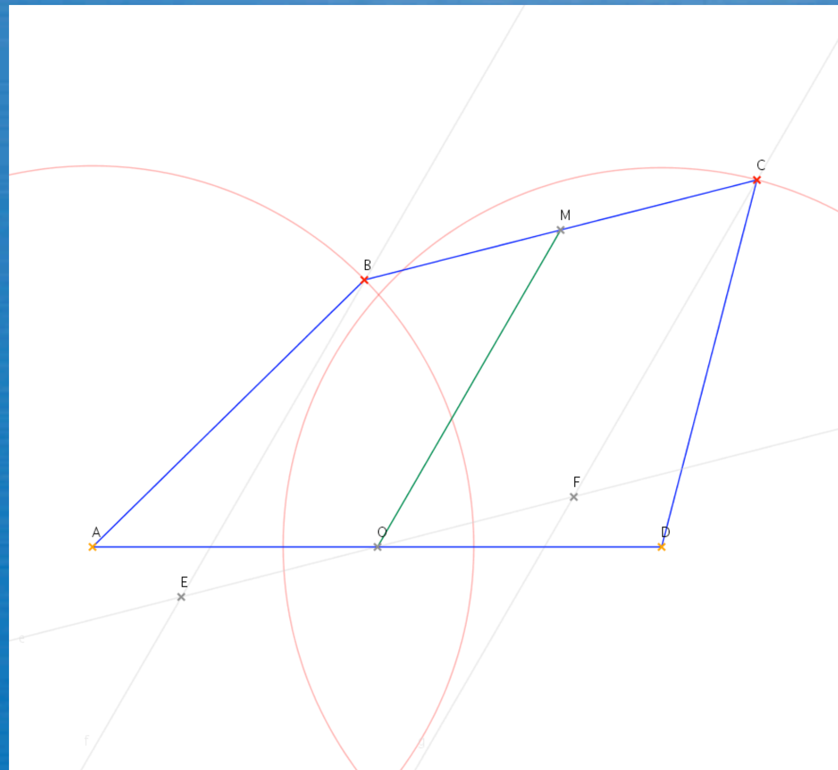
Représentation

- Les données de départ sont deux cercles et un segment les reliant
- On peut considérer à la place un quadrilatère articulé



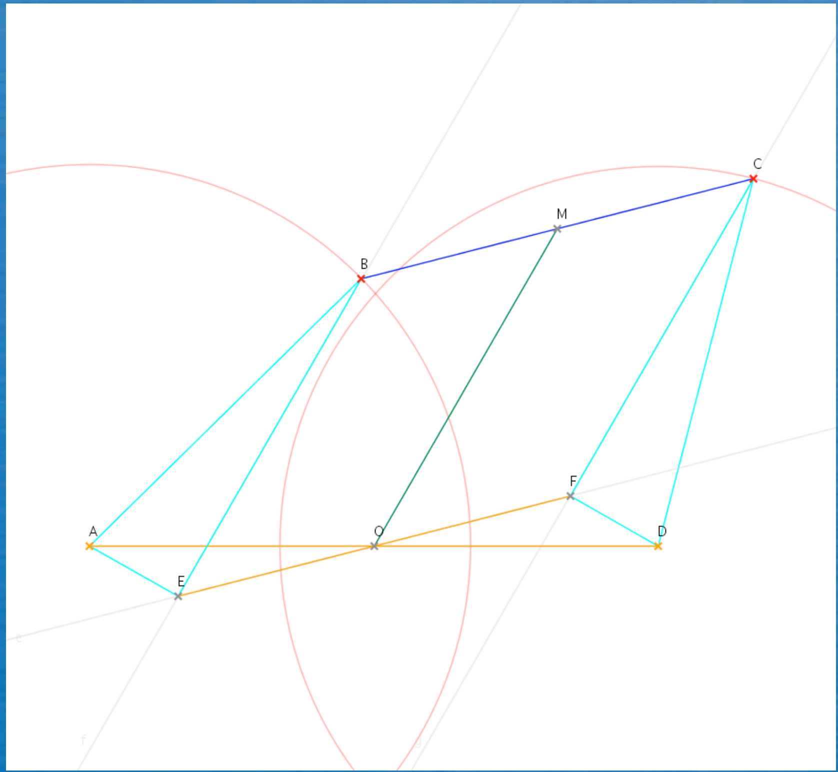
Constructions

- On cherche OM en fonction de θ
- On construit
  - deux parallèles à OM, passant par B et C
  - une parallèle à BC passant par O
  - les intersections E et F



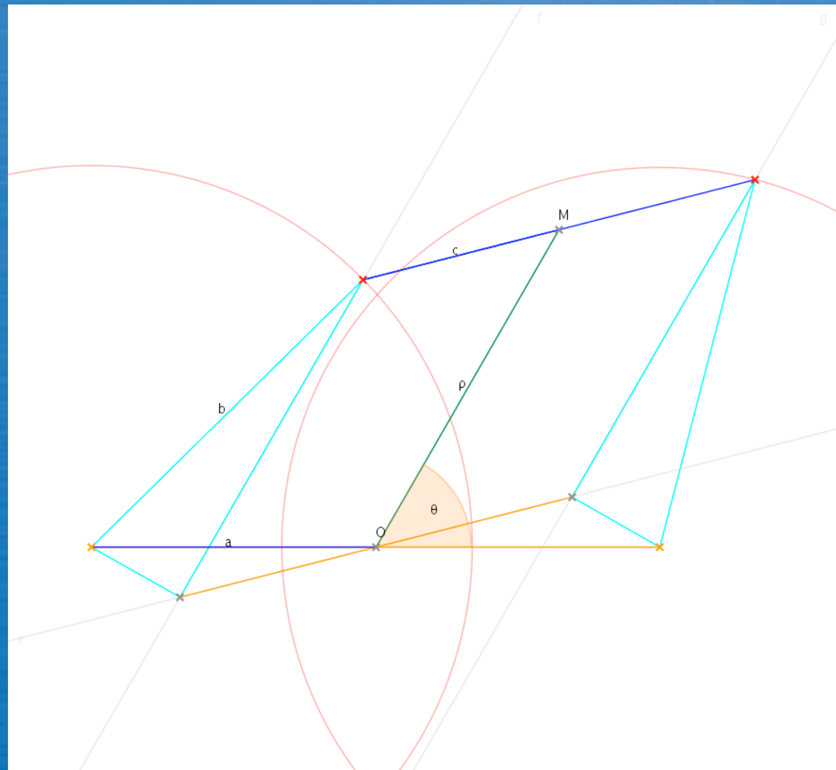
Observations

- AEO et OFD sont égaux
- AE et FD sont parallèles et égaux
- AEB et FCD sont égaux
- Les angles AEB et DFC sont égaux et supplémentaires donc droits



Posons

- AO = a
- BM = c
- AB = b
- ρ et θ, les coordonnées polaires de M



On trouve les relations

- $\rho^2 = b^2 - FD^2$
- $DG = a \sin \theta$
- $FG^2 = c^2 - a^2 \cos^2 \theta$
- D'où l'équation polaire de la courbe :

$$\boxed{\rho^2 = b^2 - \left(a \sin \theta - \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2 \theta}\right)^2}$$

Equation cartésienne

- Par manipulation de l'équation polaire, on peut obtenir une équation cartésienne

$$\boxed{(x^2+y^2)^3 - 2B^2(x^2+y^2)^2 + (B^4+4a^2y^2)(x^2+y^2) - 4a^2b^2y^2 = 0}$$

où $B^2 = a^2 + b^2 - c^2$

ETUDE DE LA FONCTION

Maintenant que nous avons trouvé l'équation des courbes de Watt, nous pouvons étudier leurs caractéristiques communes :

- Intersections avec les axes
- Symétries
- Tangentes

Intersections avec les axes

- La courbe coupe OX quand θ vaut 0 ou π. Dans ces cas l'équation devient $\rho^2=a^2+b^2-c^2=B^2$
- OY est coupé quand θ vaut +/- $\pi/2$. Après simplification, on obtient $\rho^2=b^2-(a-c)^2$

Symétries

- Le ρ^2 implique une symétrie de centre O.
- Remplacer θ, par π-θ dans l'équation ne la change strictement pas. Les courbes sont donc symétriques par OY.
- Des deux propositions précédentes, on déduit que OX est un axe de symétrie également.

Tangentes particulières

- Pour déterminer l'angle de la droite tangente à l'origine, il suffit de résoudre $\rho = 0$. Après quelques calculs, on trouve $\sin \theta = B^2/2ab$

- Aux pôles, la tangente est parallèle à OX.

En effet, ρ est maximum quand $\theta=\pi/2$: il est plus petit avant et plus grand après.

Par symétrie, il est minimum en $-\pi/2$

Cas particuliers

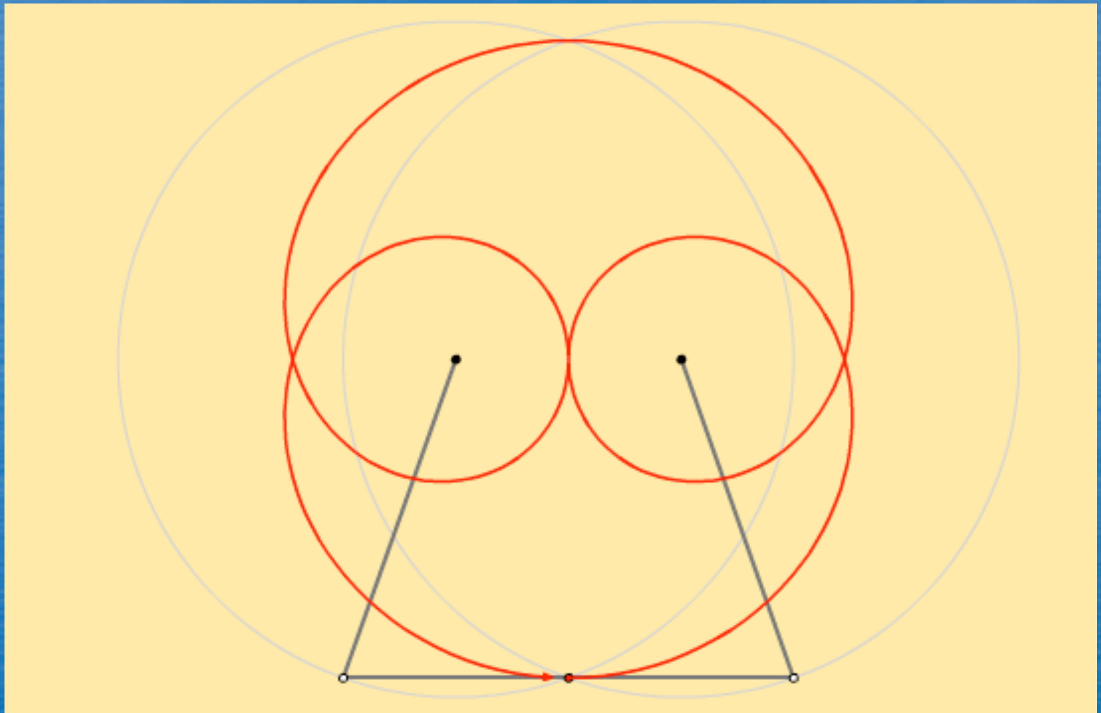
- $b = c + a$

- L’ovale et la lemniscate de Booth

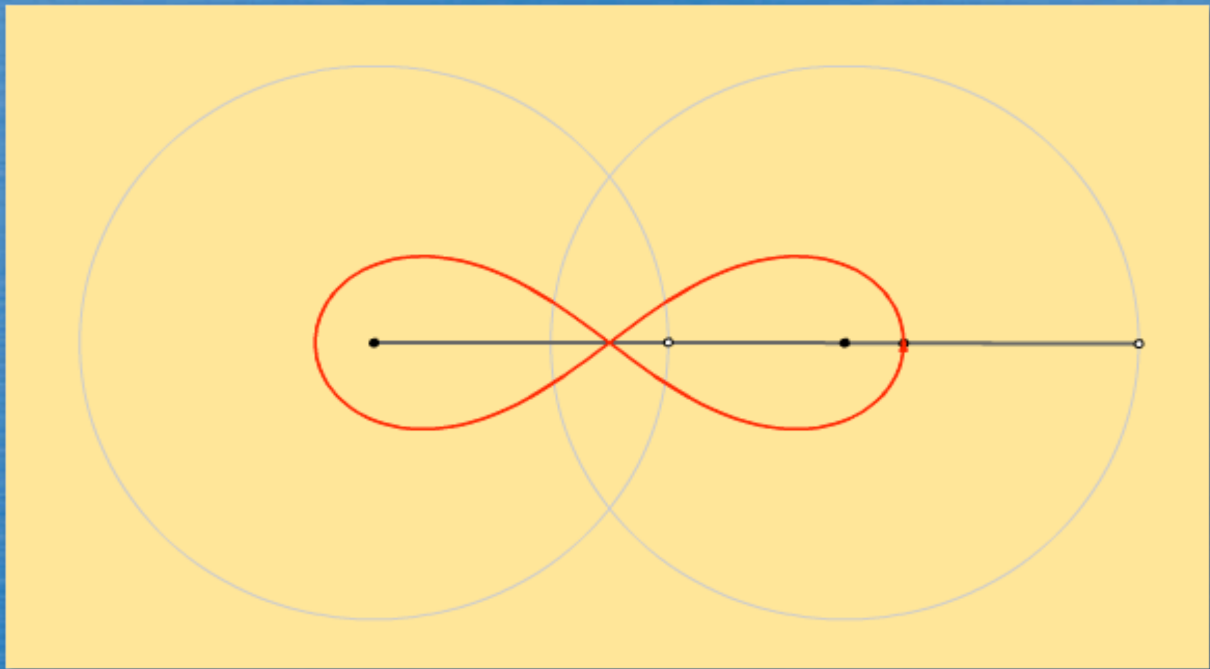
Cas particulier : b = c + a

- En remplaçant b par (c+a) dans l'équation polaire, on obtient

$$\rho^2 = 2\mathrm{a}\left(a\cos^2\theta + \sin\theta\sqrt{c^2 - a^2\cos^2\theta} + c\right)$$

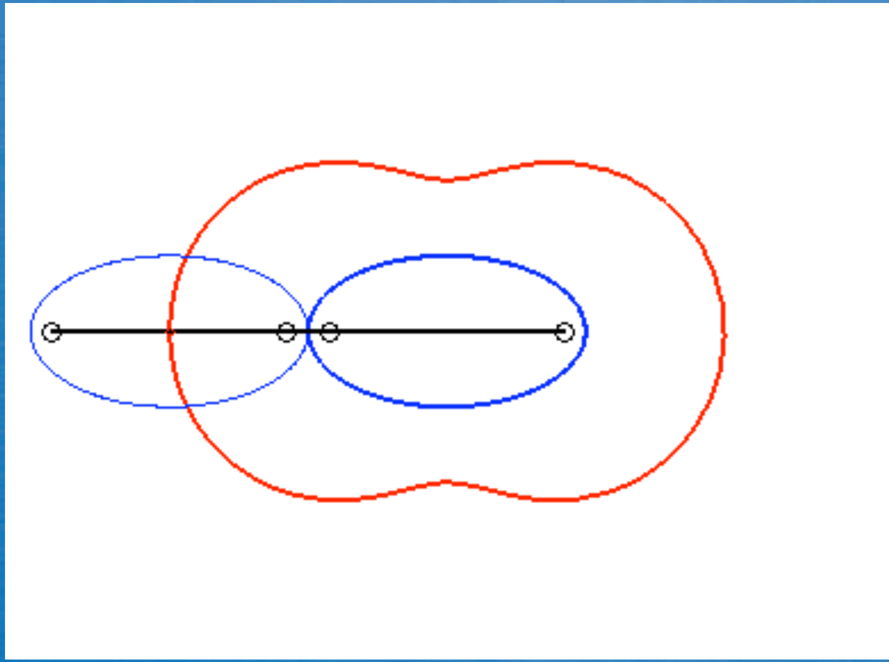


Cas particulier : Courbe de Booth



Première définition

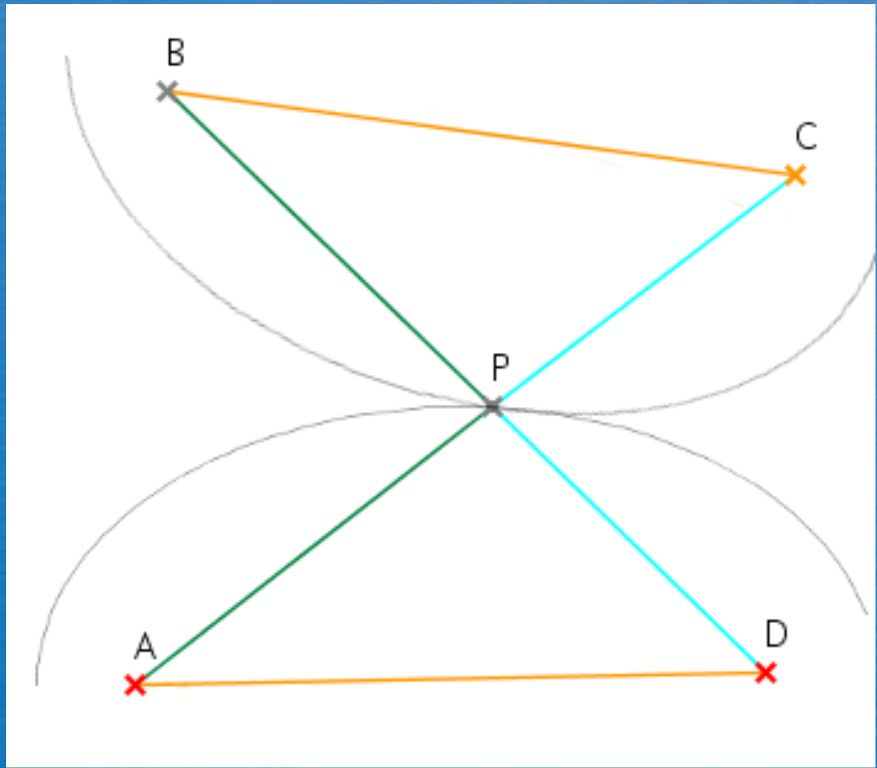
- Observons une conique qui roule sur une autre identique, avec des sommets correspondants et sans « glisser »
- Le lieu des centres nous donne une jolie courbe



Équation de la courbe

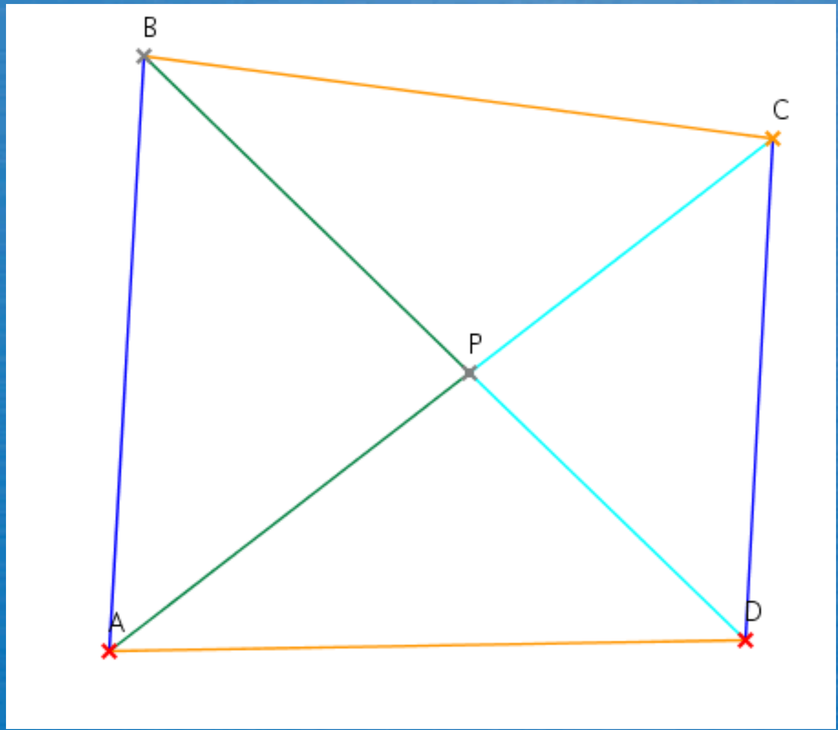
- Une éllipse « roule » sur l'autre avec des sommets correspondant, donc la distance entre les foyers est constante : c'est le grand axe

- De même, la distance entre les foyers des deux ellipses sont égales



C'est un trapèze !

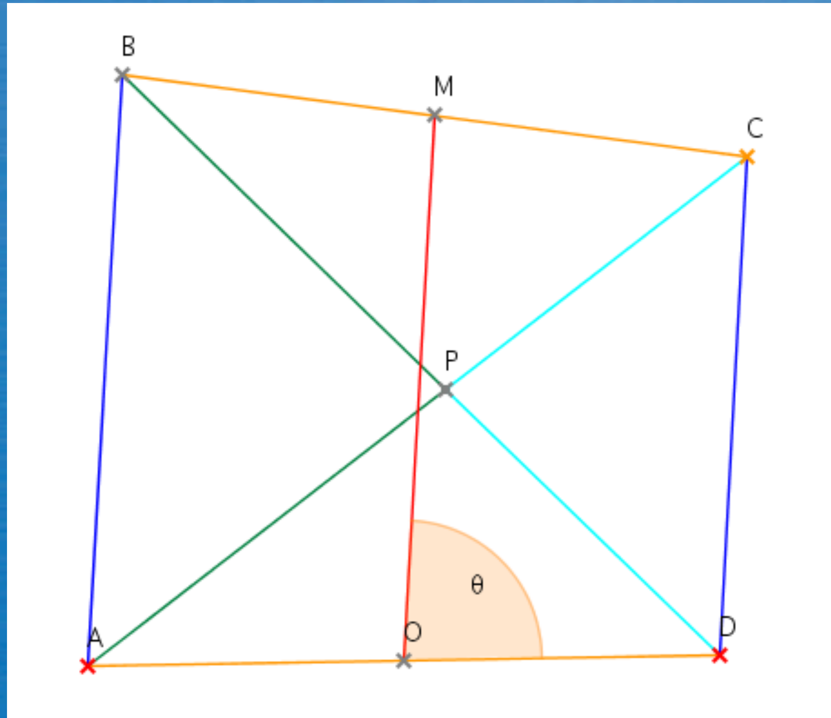
- En réalité, ABCD est un trapèze isocèle car
  - Ses diagonales sont isométriques
  - Ses côtés obliques sont isométriques
- Donc AB et CD sont parallèles



Que cherche-t-on ?

- Trouver l'équation polaire revient à trouver la longueur ρ de [OM] en fonction de θ, l'angle DÔM

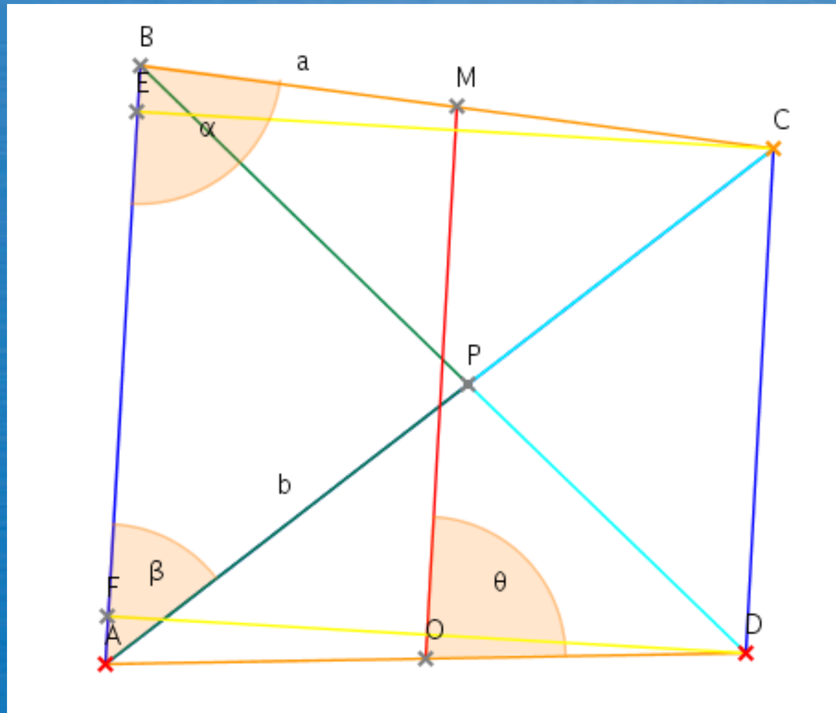
- Posons |BD| = |AC| = b et |AD| = |BC| = a



Constructions

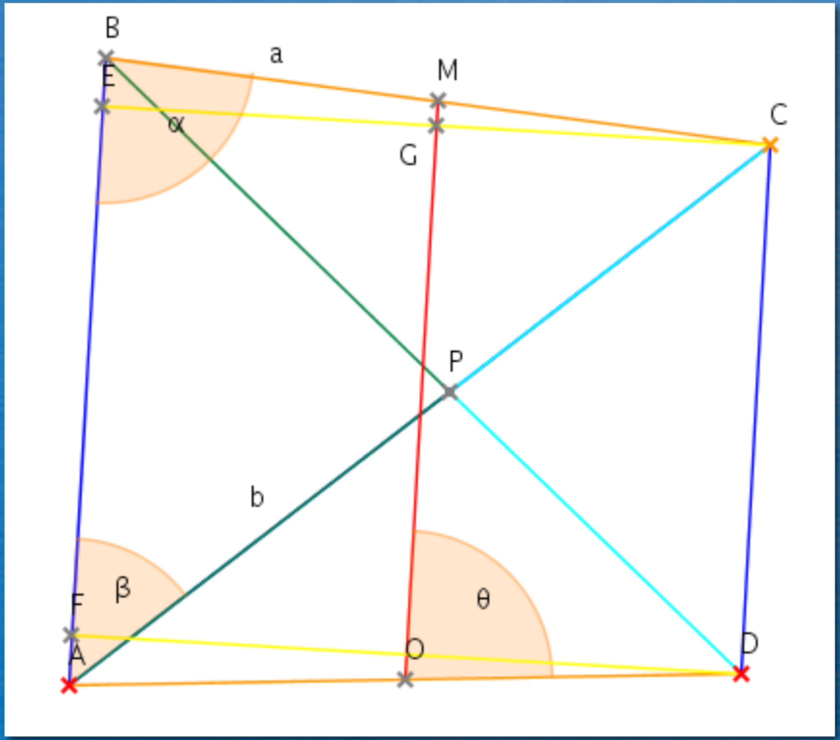
- Construisons deux hauteurs du trapèze passant par C et D avec pour pied E et F

- Notons α l'angle ABC et β l'angle BÂC



Relations

- $b \sin \beta = a \sin \alpha$
  $\Leftrightarrow \sin \beta = a \sin \alpha / b$
- $\alpha = \theta$
- $|OM| = |AE| - |AF|$
  $+ 2|MG|$
  $\rho = b \cos \beta - a \cos \alpha$
  $+ 2\,(a/2) \cos \alpha$
  $= b \cos \beta$
  $= b \cos \arcsin(\, a \sin\alpha / b)$



Équation

- Finalement

$$\rho = b\cos\left(\arcsin\left(\frac{a}{b}\sin\alpha\right)\right)$$

$$\rho = b\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\sin^2\alpha}$$

- Et enfin, $\rho^2 = b^2 - a^2\sin^2\alpha$

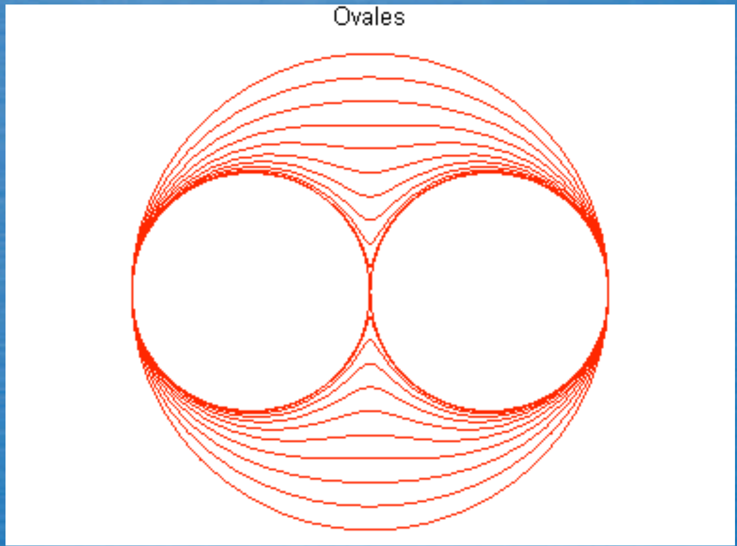
Interprétation

- En observant l'équation, on voit bien que c'est le cas particulier de la courbe de Watt quand a=c

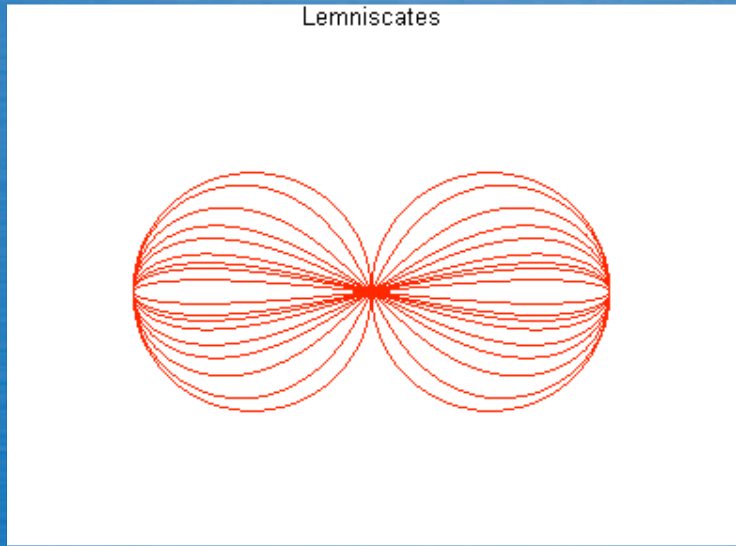
- Effectivement, les [BD] et [AC] sont les deux rayons de cercle et [BC] est le segment les reliant, dont la longueur est ici égale à la distance entre les deux centres des cercles

Graphes

- Quand a > b

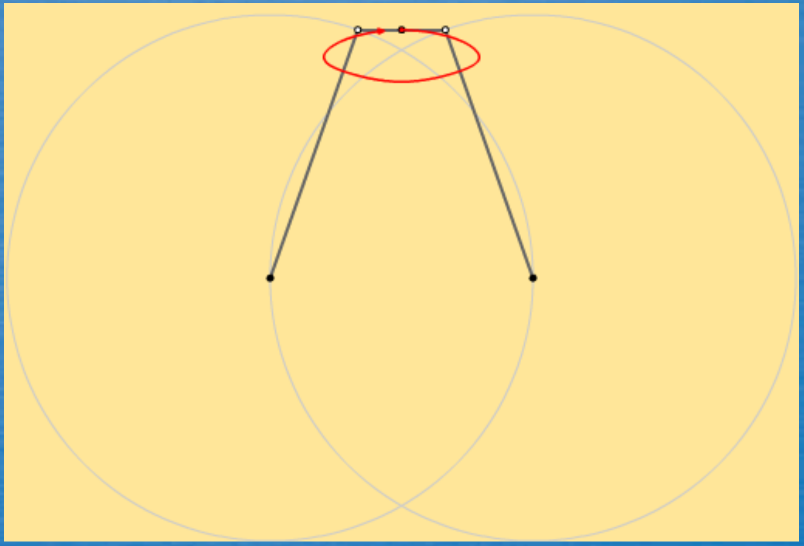


- Quand a < b



Autres cas (1)

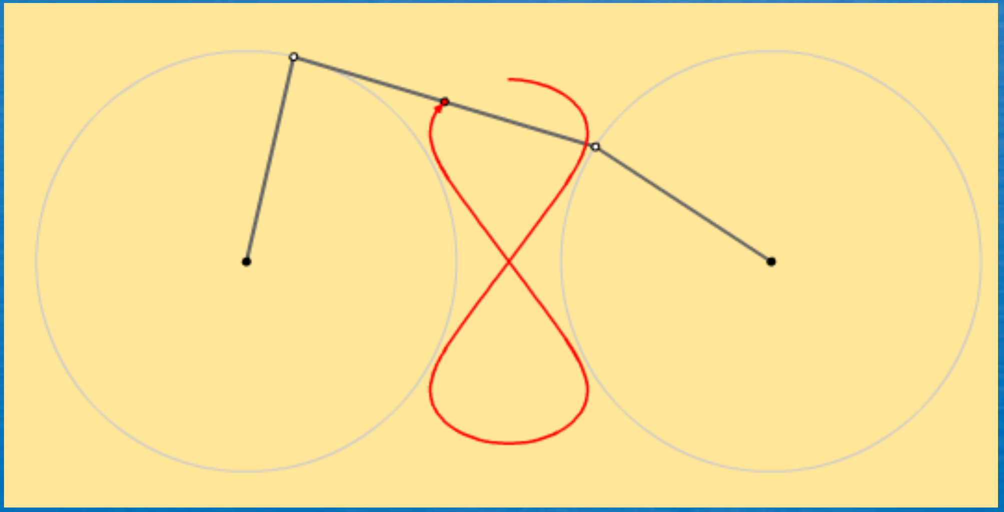
- La courbe de Watt peut donner beaucoup d'autres figures:



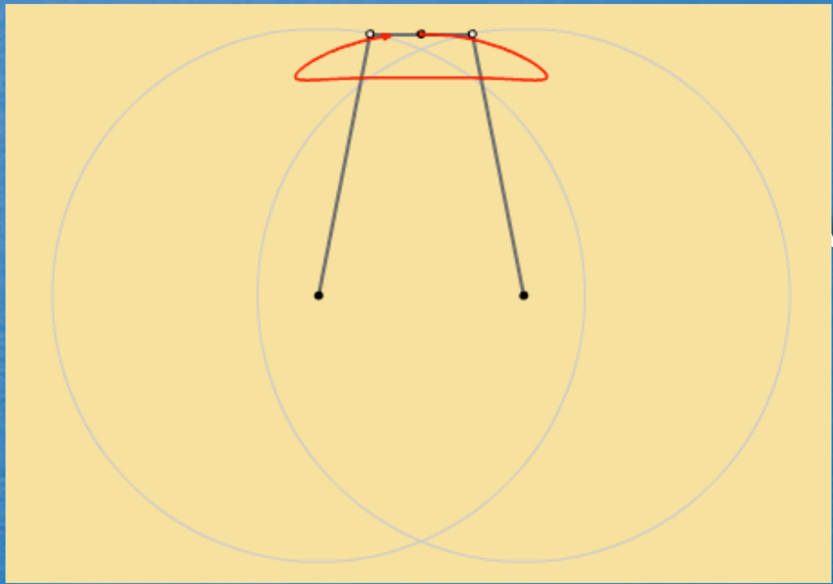
→ Ellipsoïde (b>a+c)

Courbe à longue inflexion ($a^2=b^2+c^2$)

→

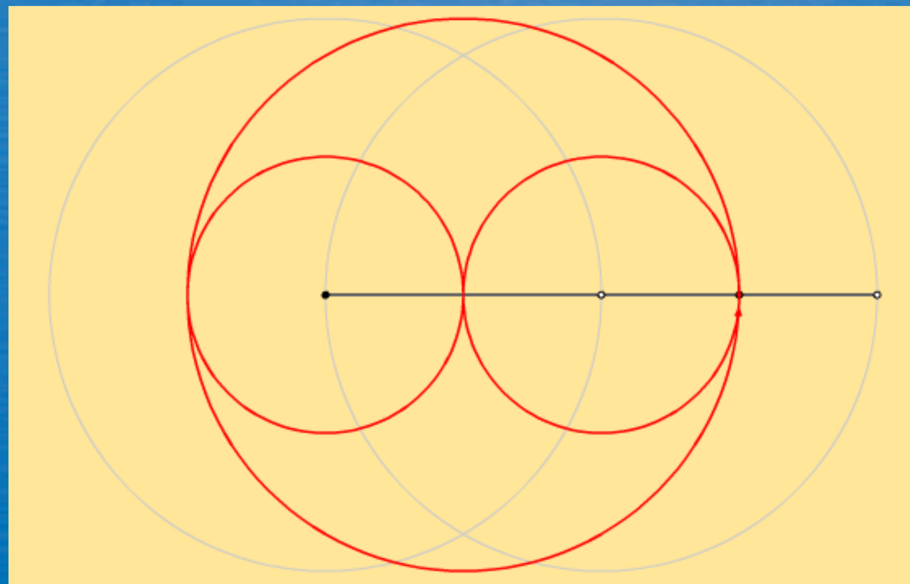


Autres cas (2)



Mécanisme de Tchebychev (b>a+c)

c=a et b=2a →



Etc.

De Watt à nos jours

- 1784: **J.Watt**: approximation de la droite par un huit très allongé. Erreur de 1/4000 => **droite quasi parfaite** (huit très allongé). Longtemps utilisé car très simple.
- 1850: **Tchebychev**: approximation plus précise, mais moins pratique
- 1864: **Peaucelier**: solution exacte.
- 1871: **Lipkin**: découvre le même système que Peaucelier et le médiatise.

L'inverseur de Peaucelier

- Un losange articulé PAQB et O fixe
- Quand P se déplace sur un cercle passant par O, Q se déplace sur une droite.