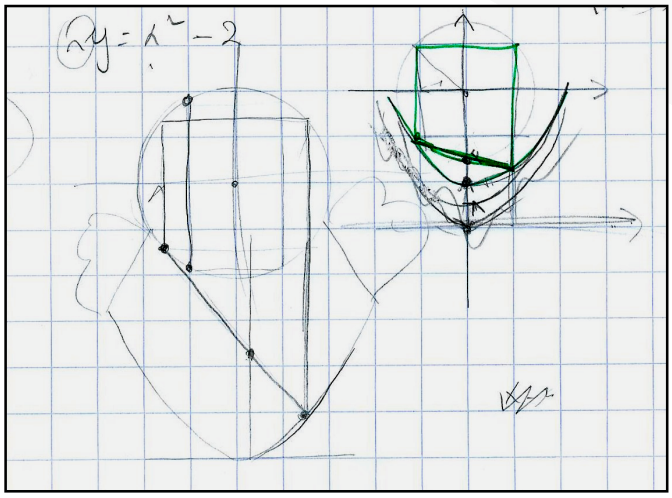
« Boomerang » dans les coniques

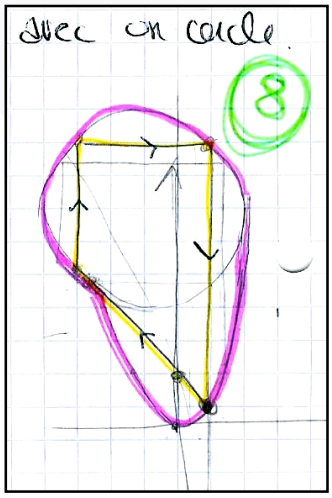
Isabela Dos Santos, Sara El Yacoubi, Noémie Hermans,
Jessica Parres, Claire Questienne
Centre Scolaire de Ma Campagne à Ixelles

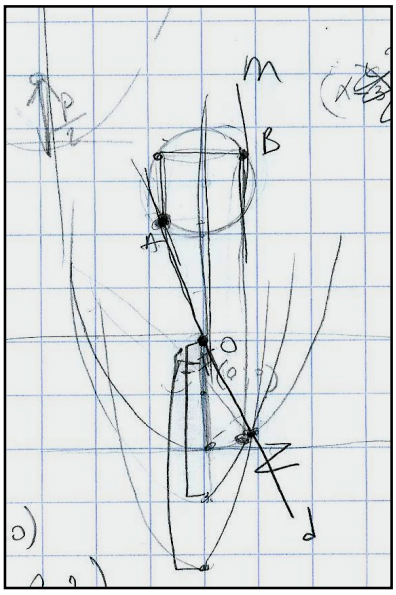
Narration de notre recherche

Il nous a été demandé de travailler sur le thème du boomerang dans les coniques. Nous avons d'abord analysé la problématique. Boomerang signifie pour nous, partir d'un point et y revenir. Nous nous sommes ensuite penché sur les coniques, plus particulièrement sur leurs propriétés optiques.

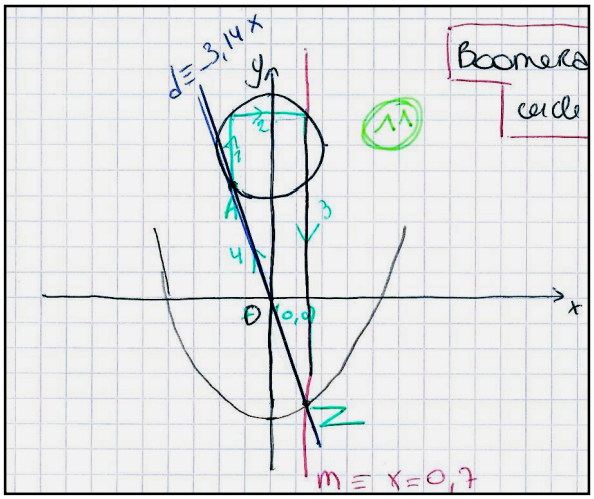
Notre première idée fut d'associer plusieurs coniques différentes afin de construire un circuit « boomerang ».
Nous avons travaillé sur un cercle et une parabole en faisant une série de dessins.





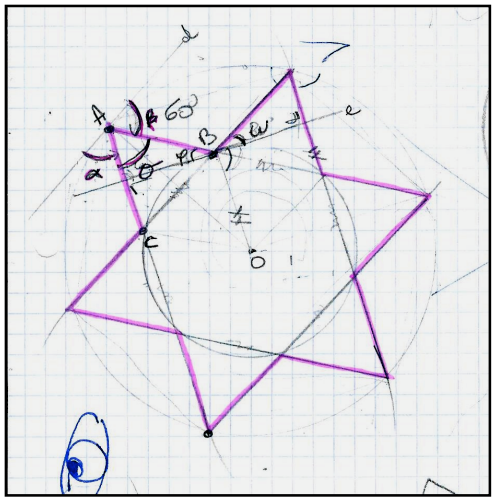


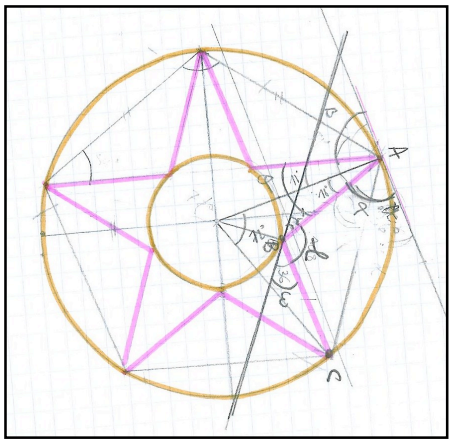
En mettant des axes et des données à ce graphique, nous avons commencé à faire des calculs (recherche de coefficient angulaire, intersections entre des droites, …) afin de trouver les équations des coniques.

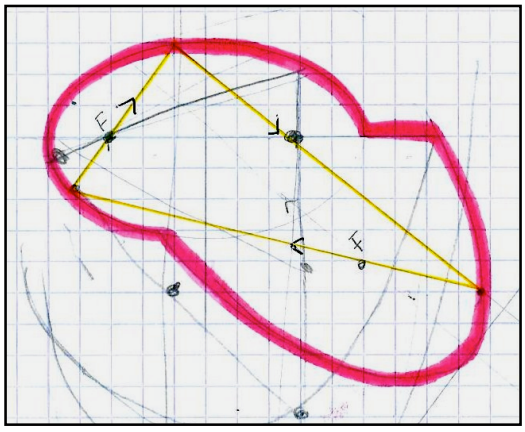


En deuxième lieu, nous nous sommes concentrés sur les polygones réguliers inscrits dans un cercle.

Ensuite, nous avons voulu être plus créatives en construisant un trajet en forme d'étoile et pour cela nous avons utilisé deux cercles.







En fin de parcours, nous nous sommes attardées sur un trajet semblable aux premiers mais bien plus complexes, nous avons donc travaillé sur une ellipse et une parabole.

Après tous ces travaux, nous avons structuré notre travail et en voici son plan :

I. Propriétés optiques
1.1) Propriété de la réflexion
1.2) Propriété de la parabole
1.3) Propriété des ellipses et boomerang dans l'ellipse

II. Polygones réguliers convexes
2.1) Le carré dans le cercle
2.2) L'hexagone dans le cercle
2.3) Les polygones réguliers convexes dans le cercle

III. Polygones réguliers concaves
3.1) Etoile à 6 branches
3.2) Etoile à 5 branches

IV. Boomerang complexes
4.1) Combinaison d'un cercle et d'une parabole
4.2) Combinaison d'une ellipse et d'une parabole

I. Propriétés optiques

1.1) Propriété de la réflexion

La loi fondamentale de la réflexion exprime que l'angle d'incidence **i** d'un rayon avec la normale à la surface réfléchissante est égal à l'angle de réflexion **r**.

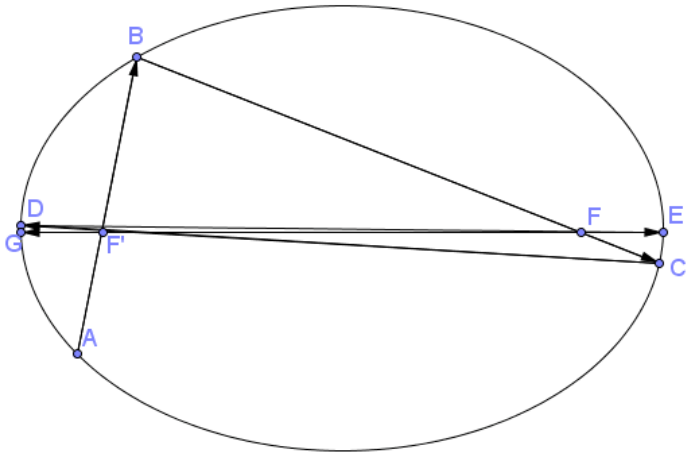
1.2) Propriété de la parabole

Tout rayon parallèle à l'axe focal se réfléchit en passant par le foyer.

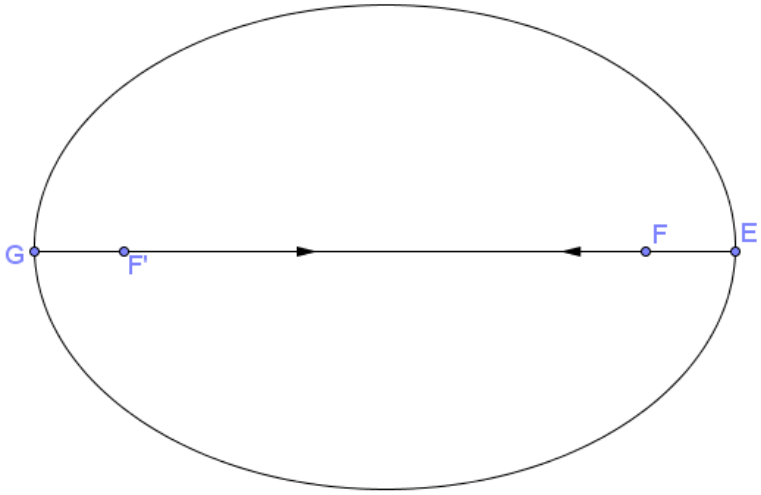
1.3) Propriété des ellipses et boomerang dans l'ellipse

Tout rayon passant par un foyer se réfléchit en passant par l'autre foyer.

Boomerang dans l'ellipse :



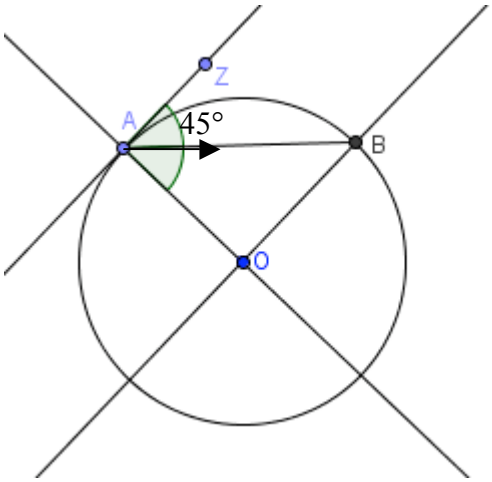
Par la propriété optique, si on envoie un rayon passant par un foyer (AB), il se réfléchit en passant par le second foyer suivant (BC) et ensuite il se réfléchit en passant par le premier foyer suivant (CD), et ainsi de suite (DE,EG,…) jusqu'à ce qu'on obtienne un segment confondu avec à l'axe focal.



La seule manière pour obtenir un boomerang dans l'ellipse est donc de partir d'une extrémité de l'axe focal.

II. Polygones réguliers convexes

2.1) Le carré dans le cercle



A partir du centre, on trace deux rayons perpendiculaires entre eux. On obtient le triangle AOB, A et B étant l'intersection des deux rayons avec le cercle. Puisque AOB est un triangle isocèle, les angles $O\hat{A}B$ et $O\hat{B}A$ valent 45°. On trace la tangente en A, perpendiculaire au rayon. La droite AB forme un angle de 45° avec la tangente car

$O\hat{A}B = 45°$

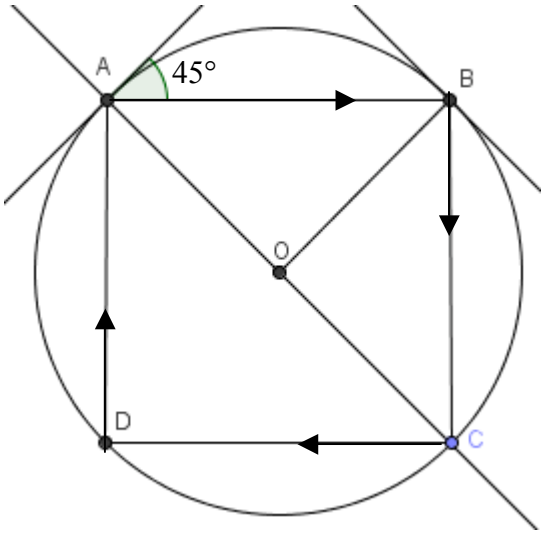
$O\hat{A}Z = 90°$

$O\hat{A}Z = O\hat{A}B + B\hat{A}Z$

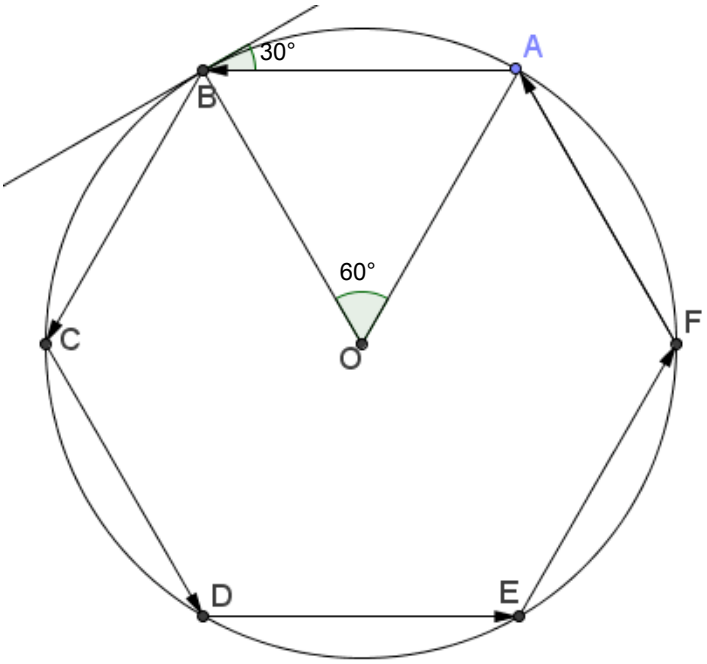
Donc $B\hat{A}Z = 45°$

Le rayon (AB) arrive ainsi en B et forme également un angle de 45° avec la tangente en B.

Puisque l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, le rayon (AB) se réfléchit en formant un angle de 45° avec la tangente… Il forme ainsi le rayon (BC). Par le même raisonnement, ce rayon se réfléchit en (CD) et ensuite en (DA). Retour en A !



2.2) L'hexagone dans le cercle



Par le même principe un hexagone peut s'inscrire dans un cercle. Voici les constructions qui le prouvent : du centre, nous envoyons un rayon qui va toucher le cercle en B. Nous envoyons un deuxième rayon qui forme un angle de 60° avec le premier. Ce deuxième rayon touche le cercle en A. Nous trouvons alors un triangle équilatéral OAB.
On trace la tangente en B, perpendiculaire à la droite OB. La droite AB forme un angle de 30° avec la tangente car comme nous l'avons vu avec le carré, l'angle tangentiel a même mesure que la moitié de l'angle au centre (60°). Puisque l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflextion, le rayon (AB) se réfléchit suivant le rayon (BC). En continuant ainsi, tous les rayons vont se réfléchir avec la même amplitude qui est de 30°, cet angle étant l'angle de réflexion.

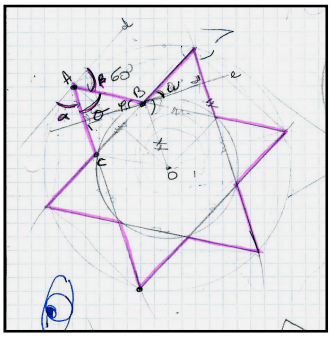
2.3) Les polygones réguliers convexes dans le cercle

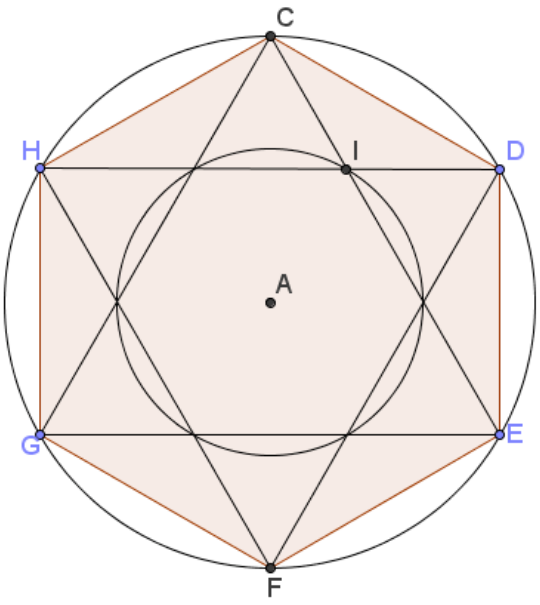
On peut ainsi former plusieurs polygones réguliers convexes (pentagone, octogone,…) par réflexion de rayon dans un cercle.

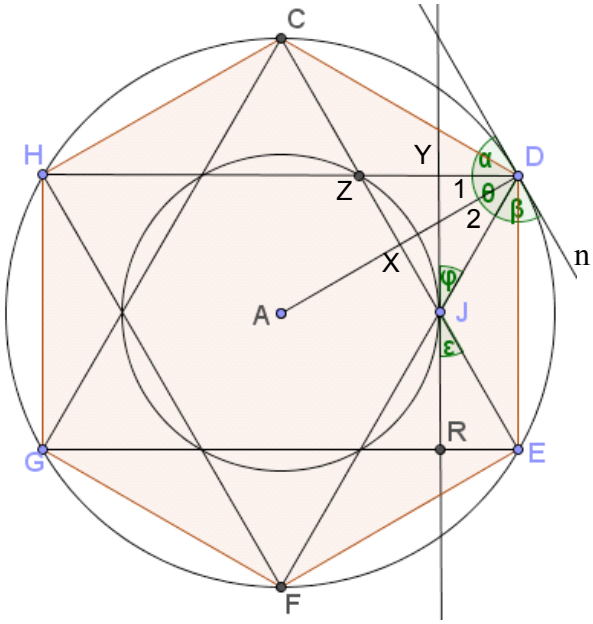
III. Polygones réguliers concaves

3.1) Etoile à 6 branches

On construit un cercle et un hexagone régulier inscrit dans ce cercle.
Avec les sommets de cet hexagone, on forme deux triangles équilatéraux. On obtient une étoile à 6 branches dans laquelle on inscrit un autre cercle.







Vérifions que cette étoile peut bien être construite à partir des propriétés optiques et que donc, l'angle d'incidence est toujours bien égal à l'angle de réflexion. On calcule quelques angles

- En D, on trace la tangente n au grand cercle, elle est perpendiculaire au rayon.

$\alpha + \beta + \theta = 180°$

Sachant que $\theta = 60°$ (angle d'un triangle équilatéral) et que les triangles DXZ et DXJ sont isométriques, on en déduit $\theta_1 = \theta_2$ et donc $\alpha = \beta = 60°$.

- En J, on trace une tangente au petit cercle, elle est perpendiculaire à la droite HD car HD est parallèle à JA (rayon) donc dans le triangle YDJ, la somme des angles vaut 180° or $\hat{Y} = 90°$ et $\theta = 60°$ donc $\varphi = 30°$.
  Le même raisonnement dans le triangle RSE, nous permet de dire que $\varepsilon = 30°$.
  Donc l'angle d'incidence est bien égal à l'angle de réflexion. $\varphi = 30° = \varepsilon$.

3.2) Etoile à 5 branches

On construit un cercle et un pentagone régulier inscrit dans ce cercle.
Avec les sommets du pentagone, on forme deux triangles isocèles. On obtient donc une étoile à 5 branches dans laquelle on inscrit un autre cercle.
Vérifions que cette étoile peut bien être construite à partir des propriétés optiques.
On calcule alors quelques angles

- En A, on trace la tangente au grand cercle, elle est perpendiculaire au rayon

$\alpha + \beta + \theta = 180°$

Sachant que $\theta = 36°$ (car θ est la moitié de l'angle au centre du pentagone qui vaut 72°) et $\alpha = \beta$ par les propriétés optiques alors

$\alpha + \beta = 144°$

$\alpha = \beta = 72°$

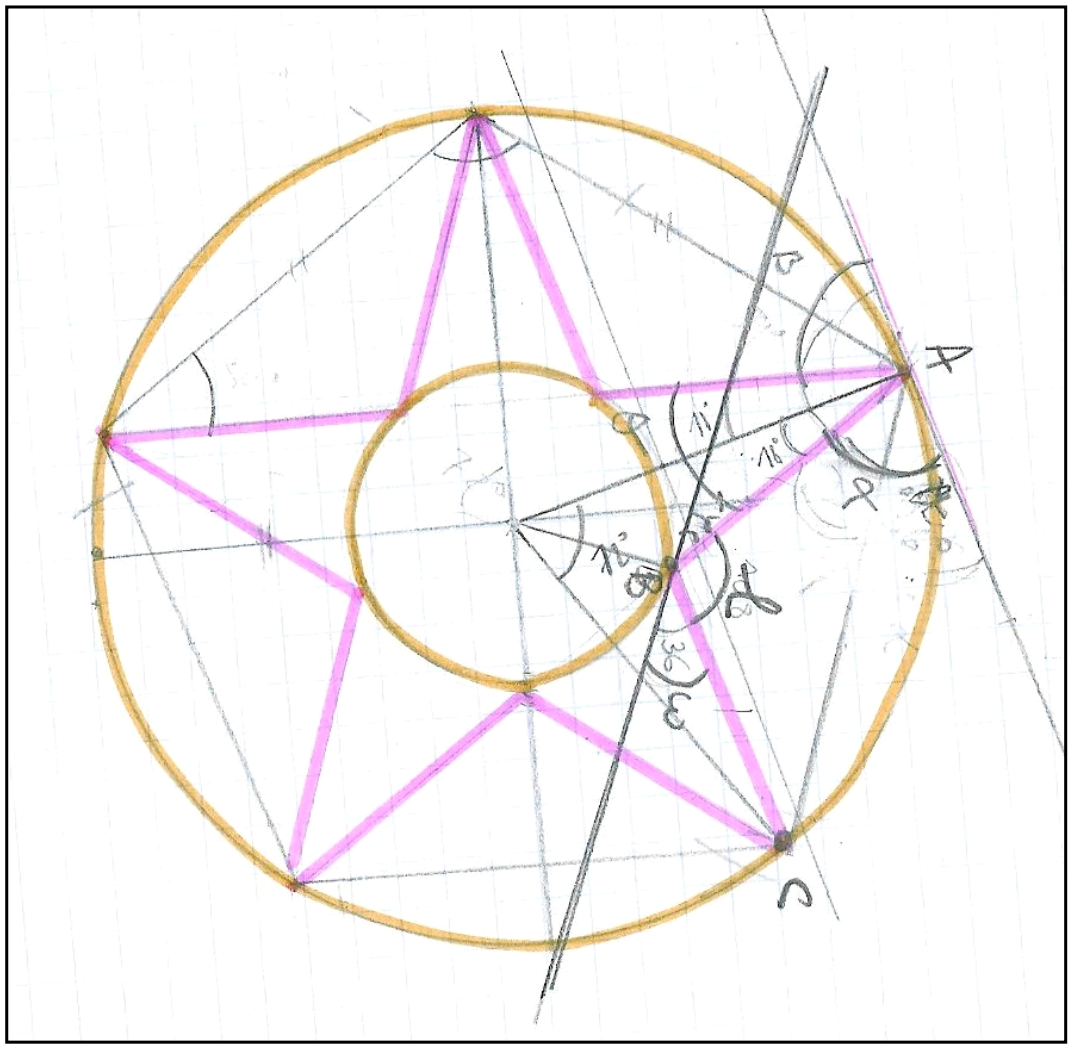
- En B, on trace une tangente au petit cercle,

$\omega + \varphi + \gamma = 180°$

Comme ABC est un triangle isocèle et que CÂB = $\frac{72°}{2}$ = 36°

alors γ= 108°

ώ = φ = 36°

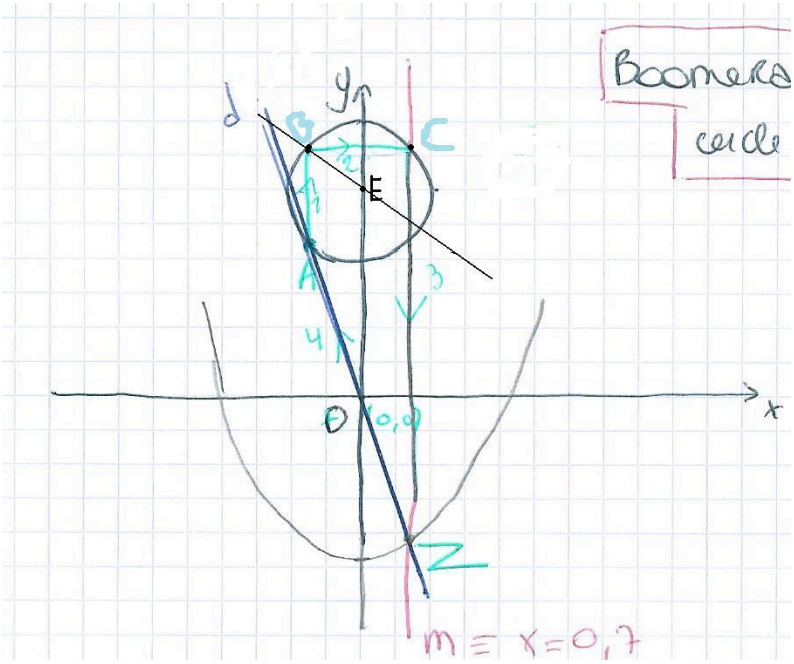


IV. Boomerang complexes

4.1) Combinaison d'un cercle et d'une parabole

Dans cette partie du travail, nous associons un cercle et une parabole dans le but de construire un boomerang.

Nous avons commencé sur base d'un dessin où l'équation du cercle ($C \equiv x^2 + (y-3)^2 = 1$) est fixée et où A appartient au cercle. (Voir aussi le graphe à la page suivante)



- Cherchons les coordonnées du point A pour que le rayon AB se réfléchisse suivant le rayon BC c.-à-d. pour que angle $\hat{B}$ forme 90°. L'équation de la droite passant par BE est y= -x + 3

B appartient à BE et au cercle donc $x^2+(x+3-3)^2=1$

$2x^2=1$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- B et A ayant même abscisse, A($-\frac{\sqrt{2}}{2}$;3 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

- Nous devons chercher l'équation de la parabole pour que le trajet-boomerang AZCBA dessiné puisse fonctionner. Nous avons donc besoin des coordonnées du foyer de cette parabole et celles d'un point appartenant à la parabole. Le foyer nous le fixons en O(0 ;0) et nous choisissons de prendre le point Z comme point appartenant à la parabole. Z appartient également à la droite m et à la droite d. Cherchons maintenant l'équation de cette parabole.

➢ Pour ce faire, nous devons connaitre l'équation de d.

d ≡ y=mx

A ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $3-\frac{\sqrt{2}}{2}$)∈d et O(0;0) ∈d

Donc, m = ($3-\frac{\sqrt{2}}{2}$)/ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ = -3,242640…

d≡ y = - 3,242640…x

➢ Nous devons aussi connaitre les coordonnées de Z.

Z∈d et Z∈m≡x= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc, y= -3,242640… . $\frac{\sqrt{2}}{2}$

y= -2,292893…

Z($\frac{\sqrt{2}}{2}$;–2,292893...)

- Nous pouvons maintenant trouver l'équation de la parabole ayant O(0 ;0) pour foyer et passant par Z($\frac{\sqrt{2}}{2}$;-2,292893…). Elle est du genre P≡x²=2py translatée

  donc P≡y= $\frac{1}{2p}x^2 - \frac{p}{2}$

  Puisque Z∈P

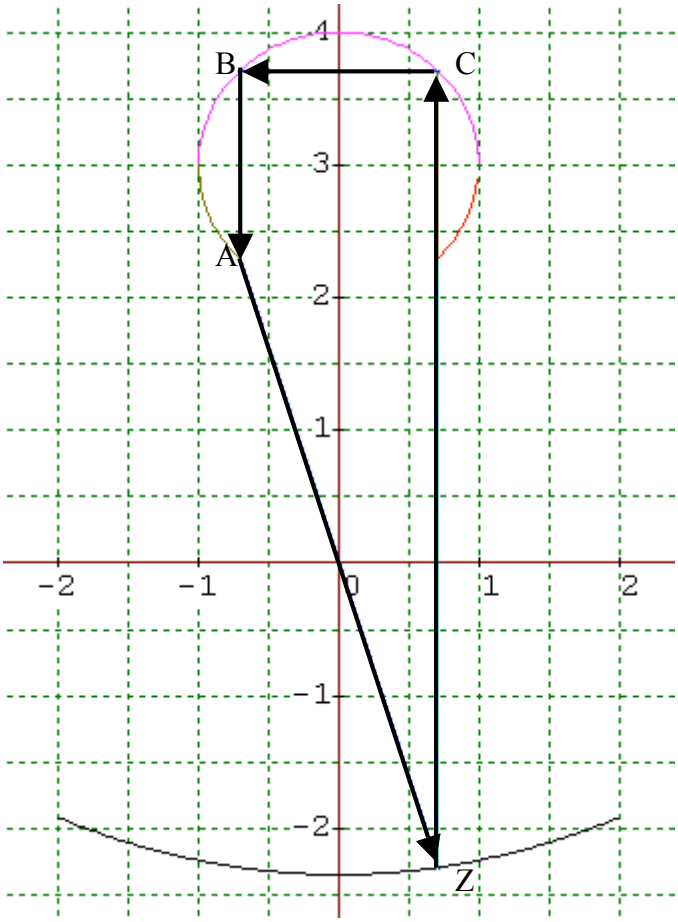
  -2,292893…= $\frac{1}{4p} - \frac{p}{2}$

  2p²-12,970562…p- 1=0

  ∆=92,117749…

  p= 4,692343…

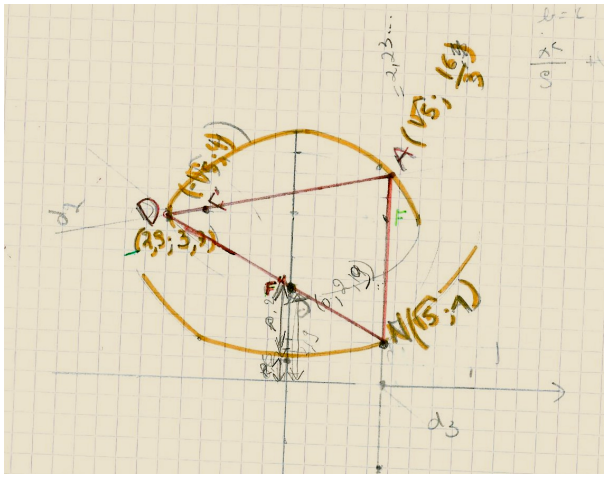
  P≡ y = 0,1065….x² - 2,346171…



4.2) Combinaison d'une ellipse et d'une parabole

On veut construire le boomerang DAND comme montré sur le dessin. Pour cela, on part d'une ellipse translatée de 4 unités vers le haut parallèlement à l'axe y.

E≡ $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$ Les foyers sont $(\pm\sqrt{5}, 4)$.



La parabole voulue est du type
$x^2 = 2p(y-k)$ (1)
où les paramètres sont à déterminer pour que le boomerang (DAN) ait lieu.
Pour cela, il faut que le rayon AD passe par F', foyer de l'ellipse. Ainsi, ce rayon se réfléchira alors en passant par F. Il faut aussi que la parabole comprenne N et que sont foyer F''soit l'intersection de la droite ND avec l'axe y.
(voir aussi le graphe à la page suivante)

- Les coordonnées de A sont déterminées puisque x=$\sqrt{5}$ et A ∈ E ⇒ A($\sqrt{5}$,16/3)
- On choisit un point N d'abscisse $\sqrt{5}$ et d'ordonnée arbitraire, nous prenons 1. N ∈ P donc 5 = 2p(1-k) (2)
- Déterminons D pour que A, F' et D soient alignés.

  Coefficient angulaire de d_2 passant par A($\sqrt{5}$,16/3) et F'(-$\sqrt{5}$, 4).: $\frac{4/3}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$

  Donc $d_2 \equiv y-4=\frac{2\sqrt{5}}{15}(x+\sqrt{5})$

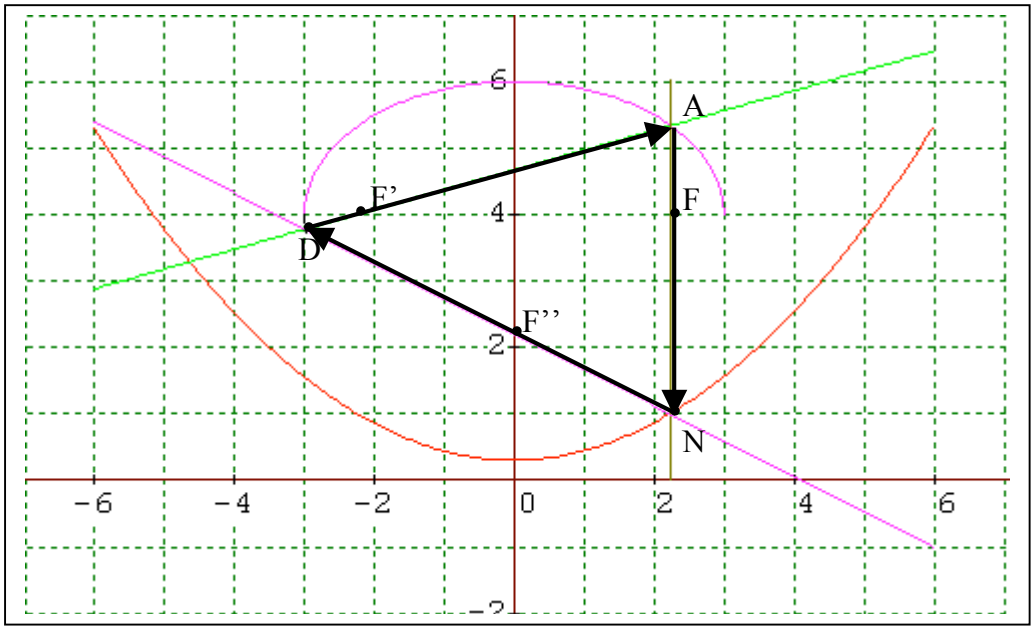
  D= $d_2 \cap$ E

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{4}=1 \\ y-4=\frac{2\sqrt{5}}{15}(x+\sqrt{5}) \end{cases}$$

  En résolvant le système on trouve $3x^2+\sqrt{5}x-20=0$ dont seul la solution x= -2,9814… nous intéresse.
  Donc D(-2,9814… ; 3,777…).
- On détermine l'équation de DN : DN ≡ $y-1=\left(\frac{3,77777..-1}{-2,9814...-\sqrt{5}}\right)(x-\sqrt{5})$
- Recherchons le foyer de la parabole. Il se trouve en DN ∩ axe y. et donc F'' (0 ; 2,1904…) (3)
- Il reste à déterminer l'équation de la parabole à partir de (1) (2) et (3) en n'oubliant pas que la parabole est elle aussi translatée verticalement.

p = $\frac{5}{2(1-k)}$ et p/2 + k = 2,1904… entraîne 4k²-12,76….k + 3,76…= 0 dont seul la solution k = 0,3041…. nous intéresse.
Donc p = 3,5929…
Par (1) on a donc P ≡ x²=7,1858….(y-0,3041…)

- Vérifions le boomerang en introduisant ces équations dans Graphmatica.



<u>Amélioration</u>

Ce serait « plus joli » si le point D était un point de la parabole.
Etant déjà préoccupées par l'effet boomerang dans plusieurs assemblages de coniques, nous n'avons pas pris le temps de faire cette recherche et nous vous proposons de la faire.