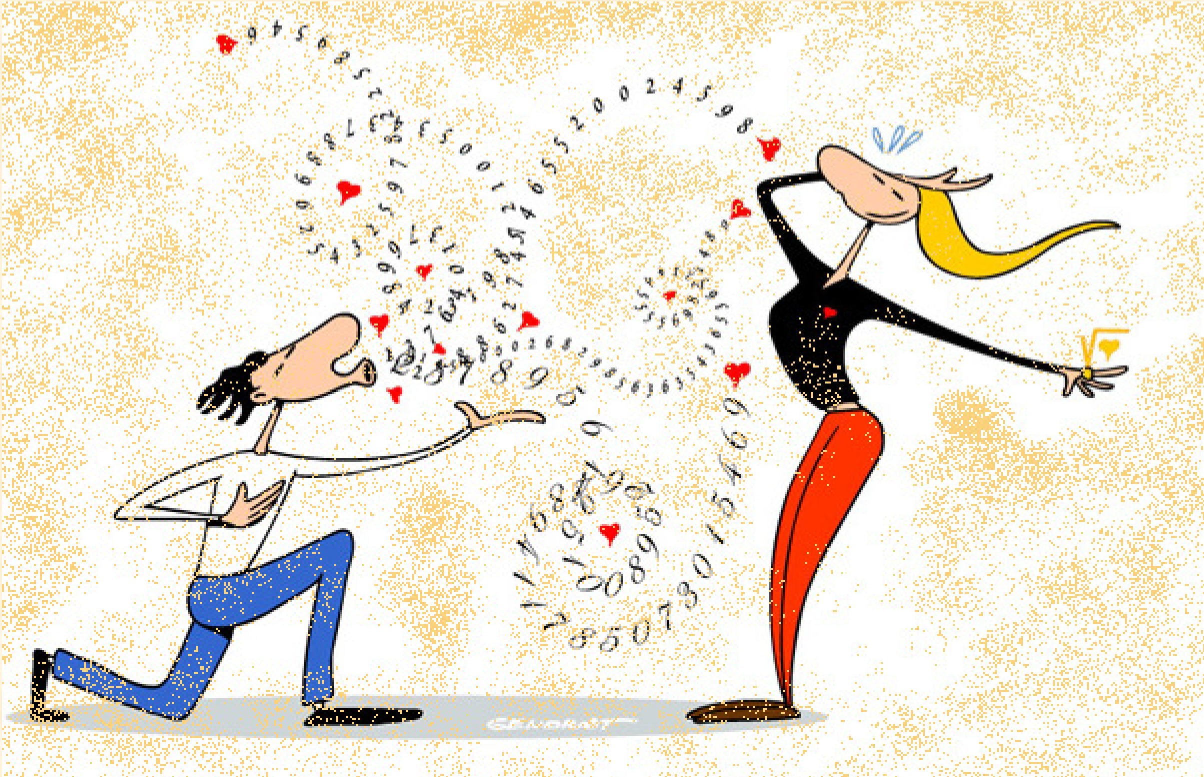
L'AIRE

Projet Dédra-MATH-isons

22 Avril 2009

Ecole Européenne Bruxelles 1

… dans tous ses états !



Par:

Emilie WILLAIN

Marie VAUDOISEY

Albert DE DEIR

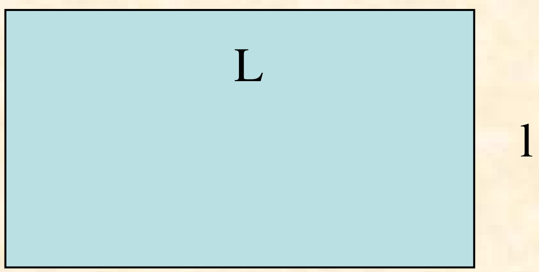
Clément LESNIAK

Vatana LJUNGQVIST

L'aire, voici un mot bien intéressant ! Mais qu'est-ce que l'aire ?

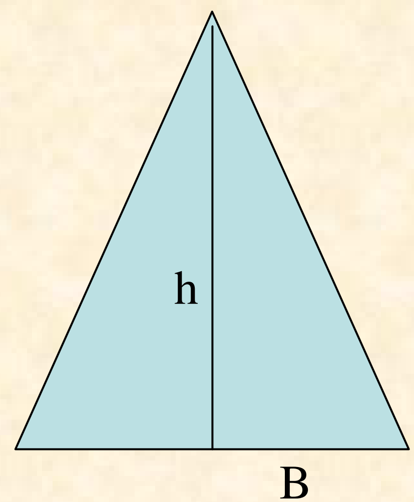
Eh bien, c'est la grandeur de l'étendue d'une portion de plan !

Et comment la calculer ? Comme ceci :

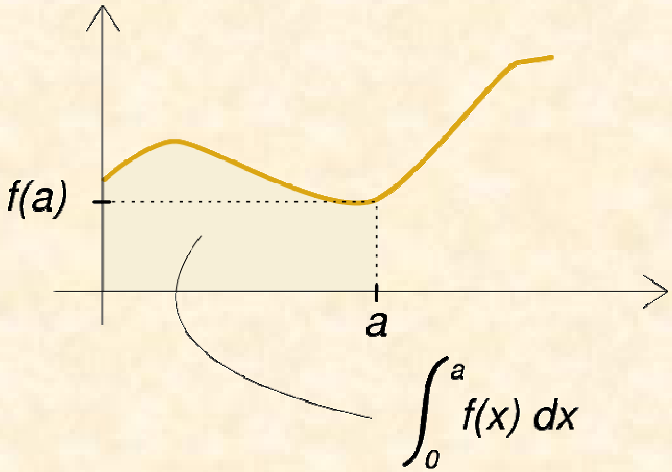


Aire = L x l

Aire = (B x h) / 2



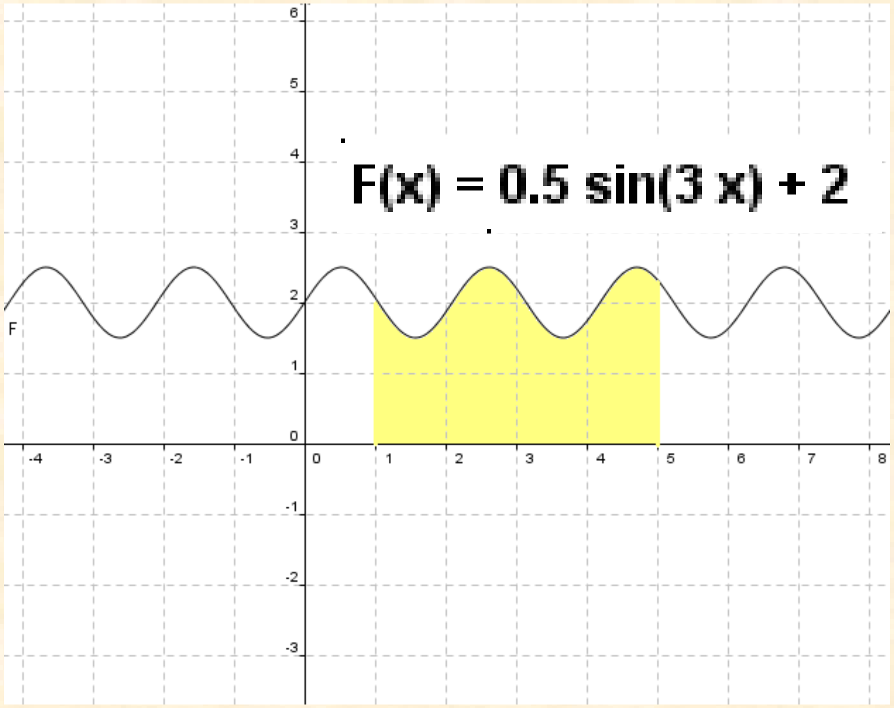
Mais encore ?



… par un calcul d'intégrale.

Pour déterminer l'aire de la portion de plan en jaune, on calcule l'intégrale de 1 à 5 de F(x)dx. D'où :

$$\text{Aire} = \Big[(-0.5/3)\cos(3x) + 2x\Big]_1^5$$



Mais pourquoi ne pas calculer l'aire d'une façon plus… originale ?

Une façon plus… amusante ?

Le Théorème de Pick

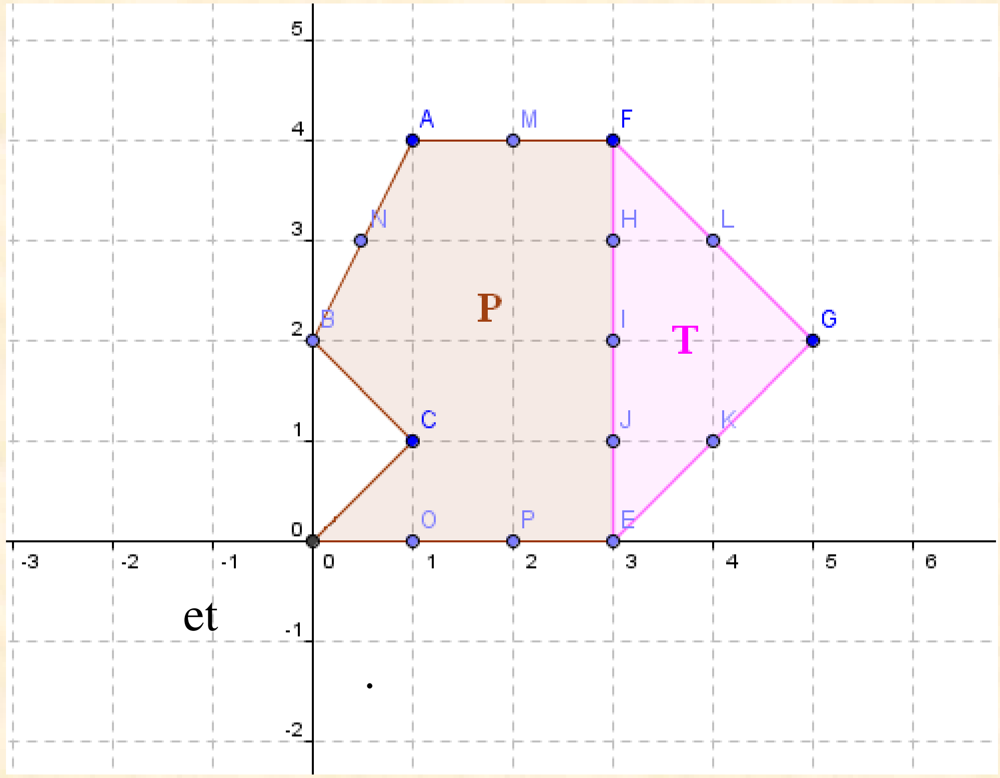
Ce théorème annonce que pour n'importe quelle figure, convexe ou concave (mais qui ne se coupe pas elle-même), placée sur un quadrillage dont les sommets en sont des points, si on appele B le nombre de points du quadrillage du bord de la figure et I le nombre de points à l'intérieur de celle-ci, on a la formule :

$$\boxed{\textbf{Aire} = \textbf{B/2} + \textbf{I} - \textbf{1}}$$

Démontrons cette formule :

Considérons un polygone P et un triangle T ayant un bord en commun, comme dans la figure ci-contre :

Supposons que le théorème de Pick soit vrai pour P et pour T. Nous voulons montrer qu'il est vrai aussi pour le polygone PT.



Puisque P et T partagent un côté, tous les points de bord le long du côté en commun fusionnent avec les points intérieurs, exceptés les deux extrêmités du côté, qui fusionnent avec les points du bord. Ainsi, en appelant *c* le nombre de points du bord commun :

$$i_{PT} = (i_P + i_T) + (c - 2)$$

$$b_{PT} = (b_P + b_T) - 2(c - 2) - 2$$

On a donc :

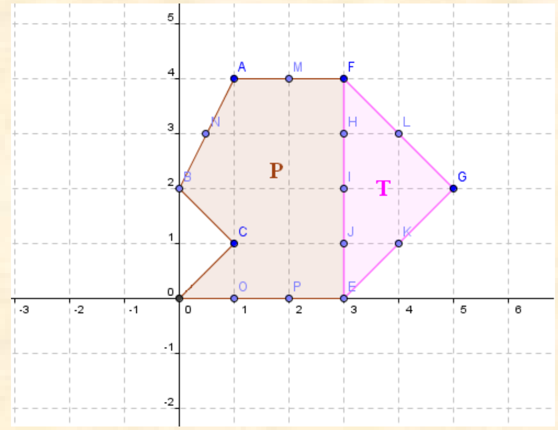
$$i_{PT} = (i_P + i_T) + (c - 2)$$

$$b_{PT} = (b_P + b_T) - 2(c - 2) - 2$$

soit :

$$(i_P + i_T) = i_{PT} - (c - 2)$$

$$(b_P + b_T) = b_{PT} + 2(c - 2) + 2$$



Le théorème étant supposé vrai pour P et T séparément :

$$A_{PT} = A_P + A_T$$

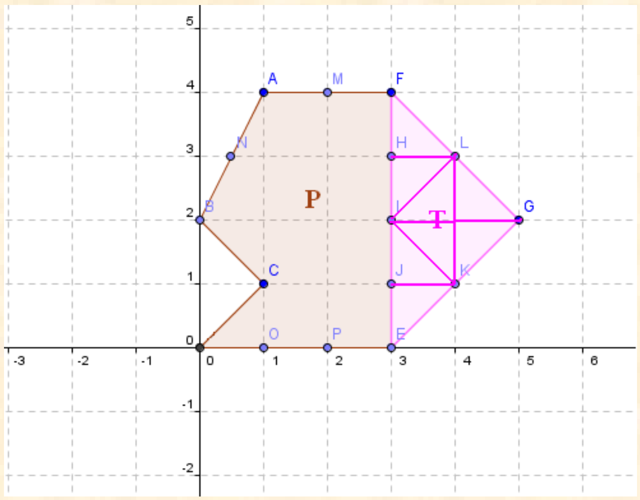
$$= i_P + \frac{1}{2}b_P - 1 + i_T + \frac{1}{2}b_T - 1$$

$$= (i_P + i_T) + \frac{1}{2}(b_P + b_T) - 2$$

$$= i_{PT} - \cancel{(c - 2)} + \underbrace{\frac{1}{2}(b_{PT} + 2\cancel{(c - 2)} + 2)}_{=1} - 2$$

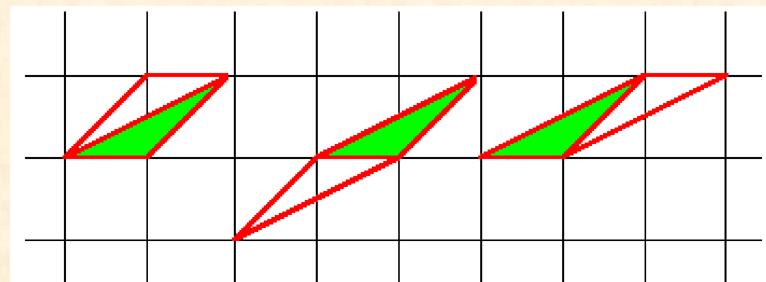
$$= i_{PT} + \frac{1}{2}b_{PT} - 1$$

Par conséquent, si le théorème est vrai pour les polygones construits à partir de n triangles, le théorème est aussi vrai pour les polygones construits à partir de $n + 1$ triangles. Il nous faut donc à présent montrer que le théorème est vrai pour les triangles.



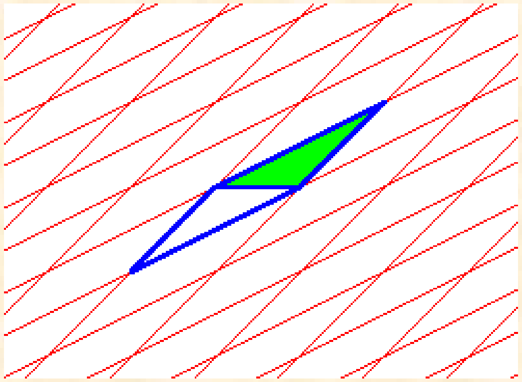
En découpant le triangle T ci-contre en triangles élémentaires, c'est-à-dire qui ne contiennent que 3 points sur les bords et aucun point intérieur, l'aire vaut ½. Et en effet, chaque triangle élémentaire est la moitié d'un quadrillage que l'on peut définir.

Il y a donc trois types de triangles élémentaires possibles.

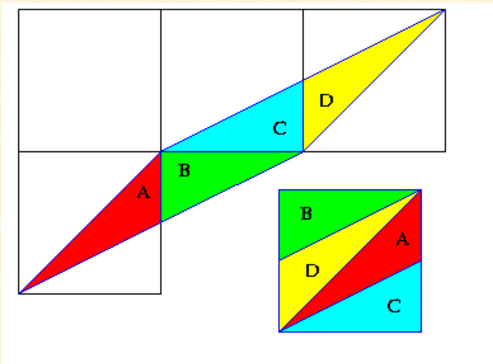


Grâce aux propriétés de la symétrie centrale, on voit que le quatrième point nécessaire pour construire un parallélogramme est un point du quadrillage. On peut donc construire un nouveau quadrillage en considérant toutes les parallèles aux côtés du parallélogramme passant par les noeuds du quadrillage originel.
Ce second quadrillage est défini de manière unique. Chaque noeud du premier quadrillage est encore un noeud du second, et puisque le parallélogramme n'a pas de point "intérieur" ni de point sur les bords autres que ses sommets, chaque noeud du second est un noeud du premier. Ainsi, chaque quadrillage détermine le même réseau de points :

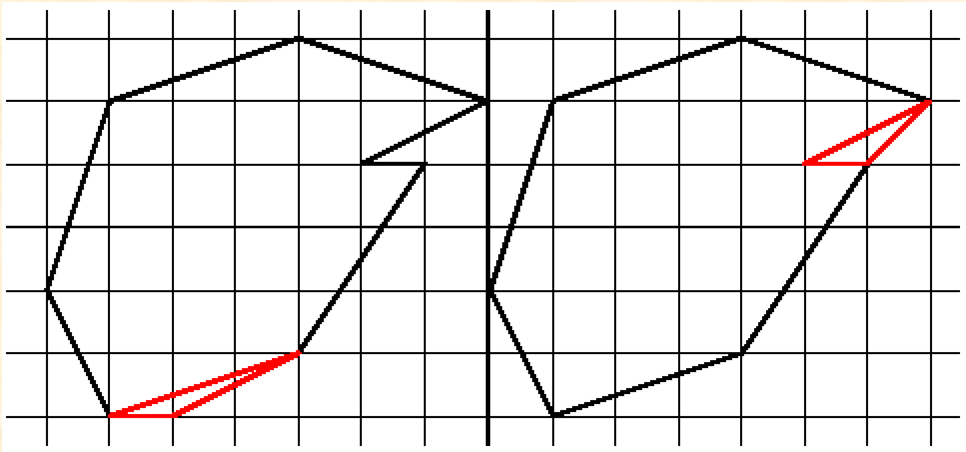
les deux quadrillages sont équivalents.



Il reste à montrer que les figures de base de deux quadrillages équivalents ont même aire.
En effet, si un parallélogramme est découpé par des carrés en plusieurs parties A, B, C, D... chaque point d'un carré est dans une région soit de type A, soit de type B... Ceci garantit que le carré est exactement recouvert par la réunion d'une région de type A, d'une région de type B... Le parallélogramme a donc
la même aire que le carré.



La démonstration se finit par récurrence, puisque chaque figure se compose de triangles élémentaires. Ainsi si on ajoute un triangle élémentaire à une figure quelconque, il reste 2 possibilités :



- autant de points "intérieurs" que P et un point sur le bord en plus. La formule de Pick s'écrit I+(B+1)/2-1 ;
-un point "intérieur" de plus que P et un point sur le bord en moins. La formule de Pick s'écrit I+1+(B-1)/2-1.

Qui vaut bien (I+B/2-1)+1/2 (puisque l'aire d’un triangle élémentaire vaut ½).

Ceci est bien beau… Mais on se pose alors une question :

Comment définir le nombre de points à l'intérieur et sur le bord de la figure ?

Il convient d'abord de limiter le nombre de points à tester en "encadrant" la figure. Puis il faut définir…

LE TEST :

**IL CONSISTE A CALCULER
LE NOMBRE D'INTERSECTIONS
DES SEGMENTS BORDANT LA FIGURE
AVEC LA DEMI-DROITE D'ORIGINE LE POINT A TESTER.**

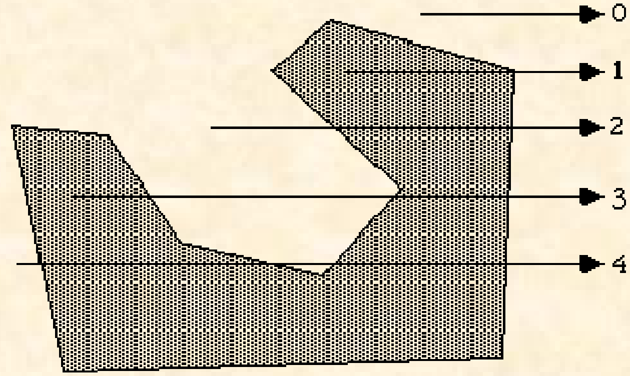
Nous allons d'abord exposer la chronologie des problèmes qui se sont présentés à nous.

Puis nous allons proposer une synthèse qui menèra à l'élaboration d'un algorithme complet.

1° Pour chaque point à tester, traçons une demi-droite d'origine ce point, horizontale et orientée vers la droite (par exemple).

On observe alors que cette demi-droite coupe la figure en un nombre :

- pair de points dès lors que le point est à l'extérieur de la figure ;
- impair de points dès lors que le point est à l'intérieur de la figure.



Cependant, cette analyse est par trop réductrice :

- si la droite passe par un sommet, le nombre d'intersections peut être pair alors que le point est bel et bien à l'intérieur de la figure (cf. figure 1) ;
- si un côté du polygone est aussi horizontal, le nombre d'intersections est infini.

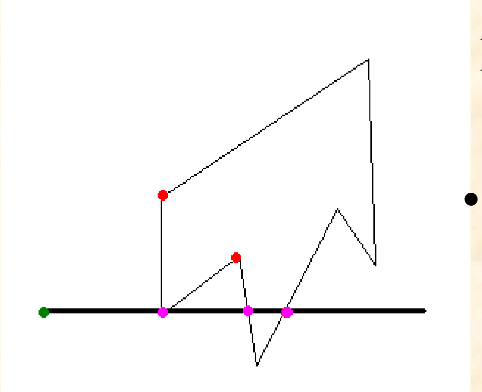
Comment résoudre ces problèmes ?

2° La droite passe par un sommet

On étudie alors la position des deux sommets du polygone joints au sommet appartenant à la demi-droite. En effet :

- si ces deux points sont d'un même côté de la demi-droite, alors la “contribution” du sommet sera nulle ;

- si ces deux points sont de part à d'autre de la demi-droite, alors on “retiendra” l'intersection avec la demi-droite au sommet considéré.

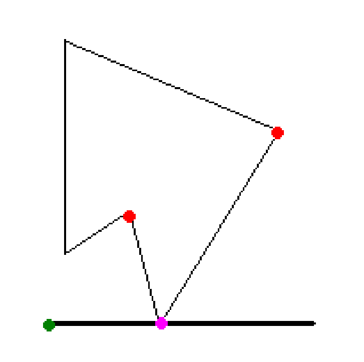


Les 2 points sont du même côté de la figure :

• nb d'intersections :

2+0=2, pair

→ point extérieur ;

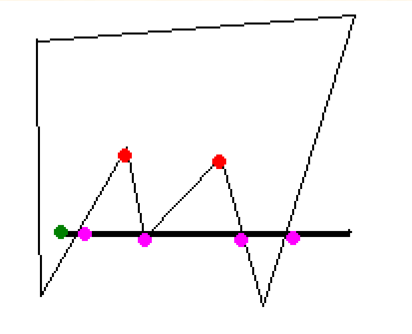


ou encore

• nb d'intersections :

0, pair

→ point extérieur.

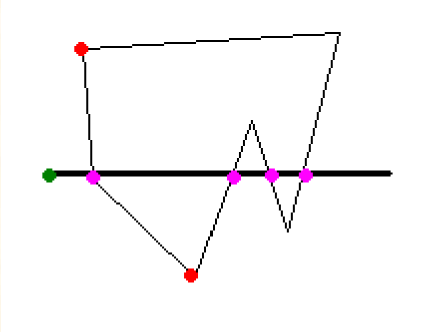


ou

• nb d'intersections :

3+0=3, impair

→ point intérieur ;



Les 2 points sont de part et d'autre de la figure :

3+1 = 4, pair

→ point extérieur.

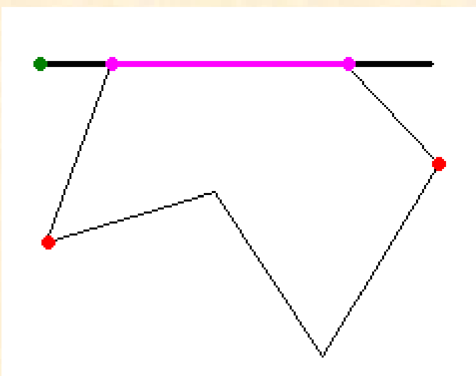
3° Le segment est confondu avec la demi-droite

Ce problème n'est en fait pas très différent du précédent.

Si le point est extérieur au segment formé par les sommets du polygone, on étudie la position des deux autres sommets des deux segments adjacents à celui considéré :

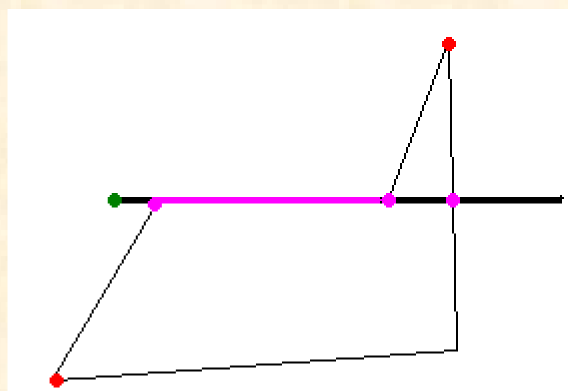
• si les sommets sont du même côté de la demi-droite, la "contribution" du segment est nulle ;

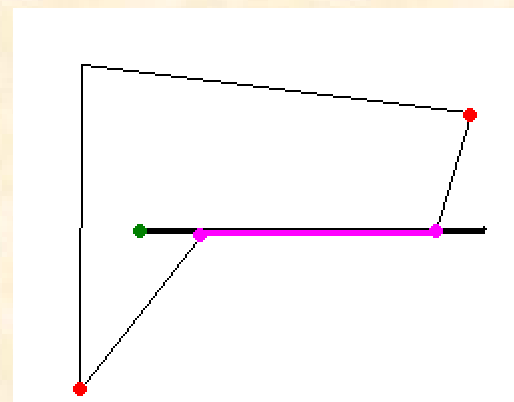
• si les sommets sont de part et d'autre, le segment "contribue" pour une unité.



0 → extérieur

1+1=2 → extérieur





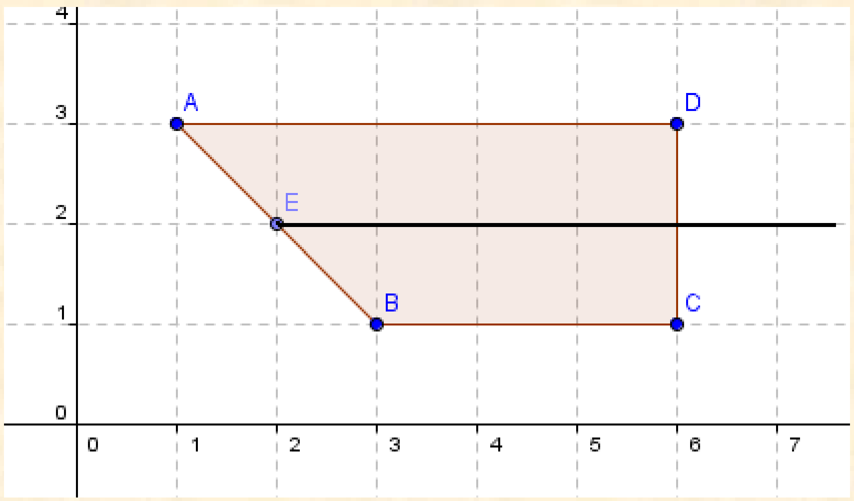
1 → intérieur

4° Comment déterminer les points sur les “bords” du polygone?

Observons que nous connaissons les coordonnées de chaque sommet (on se place dans un repère orthonormé).

Si les coordonnées du point testé coïncident avec celles d’un sommet, c’en est un !

Sinon, on détermine les équations de chaque segment bordant le polygone et on vérifie si les coordonnées du point testé vérifient une de ces équations.



Par exemple, sur la figure ci-contre :

A(1 ; 3), B(3 ; 1) et E(2 ; 2).

Le segment [AB] a pour “équation” :

$$x + y = 4.$$

E est élément du segment [AB] car ses coordonnées vérifient cette équation : le point est un point du bord.

ELABORATION

DE

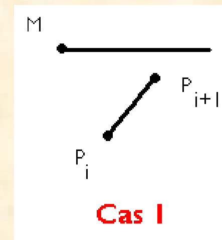
L'ALGORITHME

L'ALGORITHME CONSISTE A PRECISER
LA SUCCESSION DES PROCEDURES
A METTRE EN OEUVRE POUR DETERMINER AU FINAL
L'AIRE D'UN POLYGONE DONNE

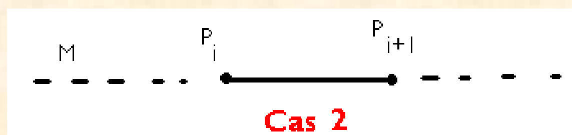
Préconditions:

1. Des points du bord qui ne sont pas des sommets ne sont pas à saisir
2. Aucun sommet ne doit être identique à un autre.
3. Les segments du polygone ne peuvent pas se croiser et chaque sommet n'en touche d'un seul autre (polygone régulier)
4. Le premier segment n'est pas horizontal (il faut alors donner les points dans un autre ordre)

1. On note P_1 à P_n les sommets du polygone, S_i les segments $[P_iP_{i+1}]$ pour i Є {1; 2; …; n-1} et S_n le segment $[P_nP_1]$
2. On parcourt tous les points M(x ; y) dans le rectangle minimum recouvrant le polygone
3. Si M(x ; y) Є $\{(x_1 ; y_1), \ldots,(x_n ; y_n)\}$, alors le point M (x ; y) est un sommet du polygone : on incrémente le compteur correspondant
4. Sinon, on vérifie l'intersection de la demi-droite issue du point M (DDM) et orientée vers les abscisses positives avec chacun des segments S_1 à S_n
5. DDM peut couper le segment S_i si y est compris entre y_i et y_{i+1} (ordonnées des points du segment)
6. Si tel n'est pas le cas, DDM ne coupe pas le segment S_i (cas 1)

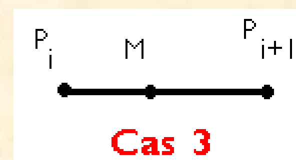


Cas 1



Cas 2

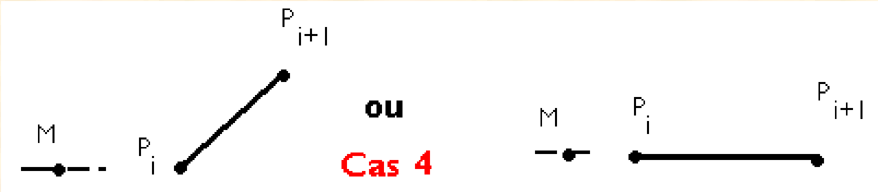
7. Sinon, on vérifie si S_i est horizontal (cas 2)



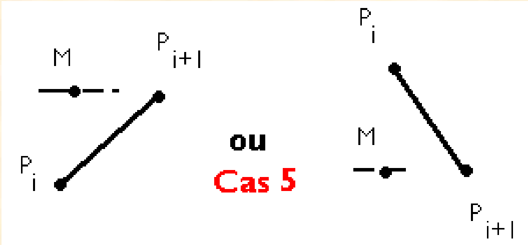
Cas 3

8. Si tel est le cas, on vérifie si x est compris entre x_i et x_{i+1}
9. Si tel est le cas, M (x ; y) est un point du bord : on incrémente le compteur correspondant (cas 3)
10. Sinon, S_i est oblique

11. On vérifie si y est égal à y_{i+1} (le cas où il est égal à y_i est pris en compte dans un autre segment, à savoir S_{i-1}) (cas 4)

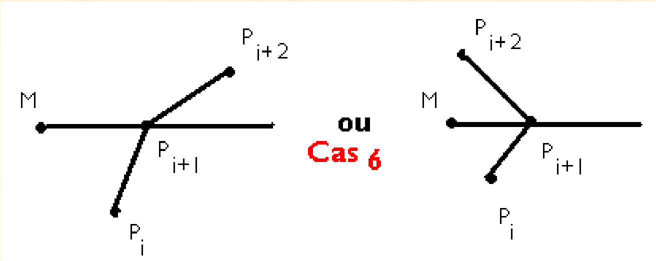


12. Si x est inférieur à x_{i+1}, DDM passe par le point P_{i+1} (cas 5)

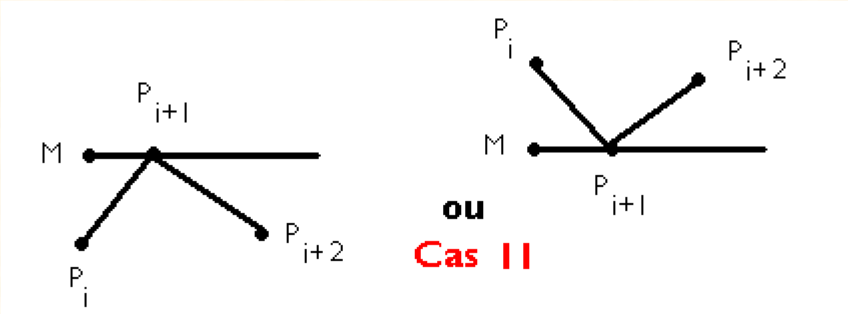


13. On détermine le type d'intersection avec le segment suivant S_{i+1}

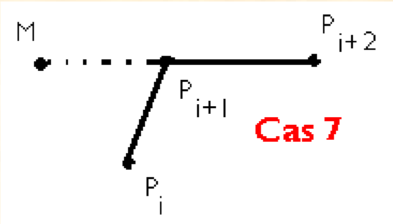
a. Soit S_i et S_{i+1} sont de part et d'autre de DDM, on incrémente le compteur de coupe (cas 6)

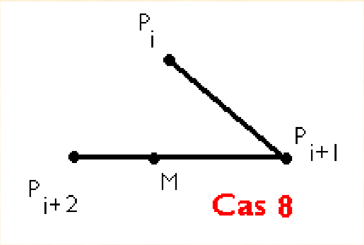


b. Soit ils sont du même côté de DDM, on n'incrémente pas le compteur de coupe (cas 11)



c. Soit le segment S_{i+1} est horizontal (cas 7)

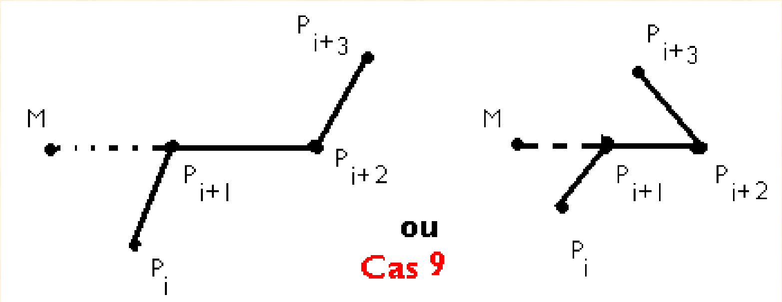


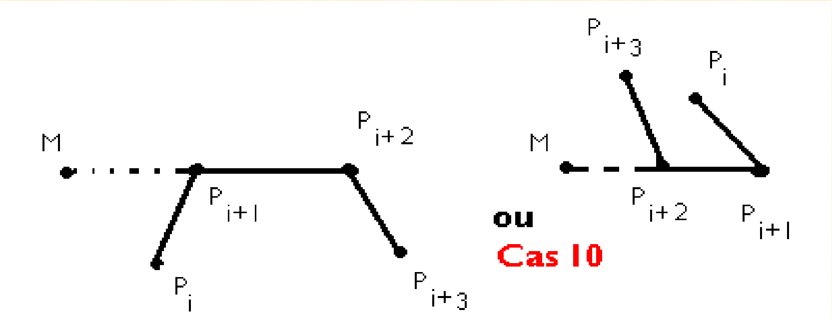


14. Si tel est la cas, on vérifie si $x_i < x < x_{i+1}$,

15. Si tel est le cas, M est un point du bord (cas 8)

16. Sinon on vérifie la position du segment S_{i+2} (cas 9 et 10)





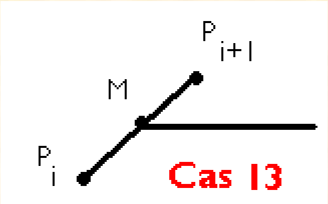
Remarque : lorsque plusieurs segments (2 ou 3) sont nécessaires pour définir le type de coupe de DDM, on n'en tient plus en compte (voir point 4)

17. A cette étape, DDM peut couper S_i mais pas en une de ses extrémités

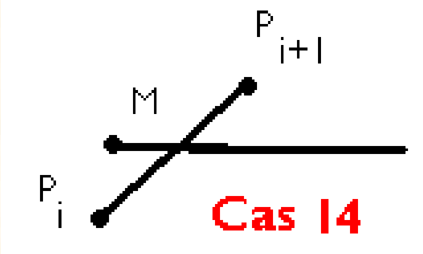
18. On tranche cela en calculant $(x_{i+1}-x_i)(y-y_i)-(y_{i+1}-y_i)(x-x_i)$

Cette valeur intervient dans la recherche de l'intersection U (x_u, y_u) de la droite $P_i\,P_{i+1}$ et de celle prolongeant DDM

19. Si elle vaut 0, alors le point est sur le bord (cas 13)

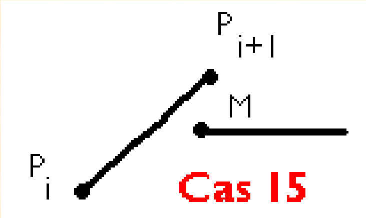


20. Si $x_u > x$, alors il y a intersection et un bord est traversé
soit $(x_{i+1}-x_i)(y-y_i) \geq (y_{i+1}-y_i).(x-x_i)$
Ce qui revient à faire:
$(x_{i+1}-x_i)(y-y_i)-(y_{i+1}-y_i)(x-x_i) > 0$ à condition que $(y_{i+1}-y_i)$ soit positif
(ou bien $(x_{i+1}-x_i)(y-y_i)-(y_{i+1}-y_i)(x-x_i) < 0$ si $(y_{i+1}-y_i)$ est négatif)
Cela se vérifie dans l'algorithme par
$(x_{i+1}-x_i)(y-y_i)-(y_{i+1}-yi)(x-x_i)$ est de même signe que $(y_{i+1}-y_i)$



(cas 14)

21. Sinon, pas d'incrémentation du compteur (cas 15)



22. Après avoir parcouru tous les segments S_i, il ne reste plus qu'à vérifier la parité du compteur : si le nombre d'intersections de DDM avec le polygone est impair, le point M est intérieur au polygone et on incrémente le compteur correspondant

23. On dispose finalement du nombre de points intérieurs et sur le bord : il ne reste plus qu'à appliquer la formule de Pick !