Site collectif polluant et monopole : localisation et tarification

Denis Lescop
*CRESE, Université de Besançon**

1 Introduction

Développer de nouvelles installations collectives polluantes est devenu un processus complexe mêlant des enjeux à la fois économiques, politiques et sociologiques. Durant la dernière décennie, les administrateurs publiques et les entreprises ont de plus en plus été confrontés à des groupes d'individus exigeant la prise en compte de leurs revendications relatives aux dangers d'exposition à la pollution. Cette intense opposition a souvent conduit à retarder, voire empêcher la construction des installations.

D'un point de vue théorique, les arrangements compensatoires fournissent une solution efficace à ce type de problème. Ces compensations prennent la forme de paiements directs (transferts monétaires) ou indirects (avoirs fiscaux, remises d'impôts) aux victimes de la pollution. Sur un plan pratique, ce système a été largement utilisé (notamment aux États-Unis) et a souvent permis la résolution des conflits provoqués par l'installation polluante. Dans leur article, Kunreuther et Easterling (1996) décrivent de telles situations et examinent le rôle et l'acceptabilité sociale des systèmes de compensations relatifs à la localisation d'installations engendrant différents niveaux de pollution et risques environnementaux (voir également Bacot et al. (1994), Kunreuther et al. (1996) et Amey et al. (1997)).

Pour mieux cerner le problème, nous emprunterons un exemple à l'économie locale. Plaçons-nous dans une région N composée de n communes. En France, la loi du 13 juillet 1992, interdit aux communes, pour 2002 et

* CRESE, Université de Besançon, UFR SJEPG, 45 D, Avenue de l'Observatoire, 25030 Besançon cedex, France. E-mail : dnlescop@aol.com

sous peine d'amendes, toute mise en décharge des ordures ménagères et impose le recyclage des emballages (les seules décharges autorisées étant celles de déchets ultimes répondant à certaines normes). Pour se mettre en conformité avec cette loi, nous admettons que ces communes doivent s'équiper d'une usine de traitements des déchets. Cette installation présente des économies d'échelle impliquant l'utilisation d'un seul site pour desservir l'ensemble des n communes. Pour au moins pouvoir bénéficier de ces économies d'échelle, les n communes vont se regrouper en syndicat et passer un accord de participation à un processus collectif permettant la mise à disposition de l'usine. Celle-ci devient alors un bien collectif non pur avec exclusion d'usage (bien club, Buchanan (1965)). Cependant, l'usine émet des pollutions (bruit, odeurs ou encore dégradations du paysage). Ces impacts négatifs se répartissent de manière inégale sur toutes les communes et dépendent fortement de l'emplacement même de l'usine dans la région et de la perception des communes quant aux dégâts environnementaux. Chaque commune va ainsi associer une valeur différente à chaque localisation possible de l'installation. Nous admettrons qu'il existe n localisations possibles, à savoir une par commune (cette hypothèse peut se justifier par la présence de plans communaux d'occupation des sols indiquant un seul site possible par commune pour l'installation). L'effet externe de la mise à disposition du bien peut être décomposé en deux parties distinctes : un effet correspondant aux types d'externalités subies et un effet lié à l'identité de la commune choisie comme hôte pour le site (relations d'amitiés ou politiques par exemple ou, plus simplement, effets psychologiques dûs à la proximité d'un site à risque). Nous supposerons que les effets liés à ces différentes externalités (bien qu'ils soient souvent très subjectifs) peuvent être évalués monétairement. Alors que trouver un site pour la station d'épuration sera bénéfique pour la région dans son ensemble, il est probable que certaines communes ne soient pas très enthousiastes (celles associant une valeur négative à certaines localisations). Cette structure est typique du syndrome « Pas Chez Moi » (NIMBY). Le bien collectif a donc une double nature : ses bénéfices sont dispersés dans la région alors que son impact négatif peut se concentrer sur un nombre relativement petit de communes.

Pour résoudre ce type de problème, les communes disposent de deux moyens principaux. Elles peuvent soit construire et gérer leur propre installation (ce qui représente des investissements financiers et techniques considérables), soit faire appel à une entreprise pour prendre en charge l'installation (cadre notamment de la délégation de services publics).

La littérature économique s'est très largement focalisée sur le premier type de solutions en considérant la mise en place d'un système de compensations des victimes de la pollution permettant la localisation d'un site collectif polluant. Ces modèles proposent des mécanismes d'enchères sous pli cacheté (ou d'autres techniques de révélation de la demande) dans lesquels une victime de la pollution doit annoncer les compensations monétaires minimales qu'elle désire recevoir pour couvrir ses dommages environnementaux. Dans ces modèles d'enchères, l'initiateur de la procédure est le groupe d'individus (victimes potentielles de la pollution) ou une agence centrale les représentant (Kleindorfer et Kunreuther (1986), Kunreuther et al. (1987), et, Kleindorfer et Sertel (1994)). La procédure permet de sélectionner un agent comme hôte pour le site polluant et d'établir des schémas de compensations entre agents. La même problématique a également été utilisée dans le cadre d'un site privé polluant où l'initiateur de la procédure est une entreprise (Rob (1989) et Pesendorfer (1998)) qui choisit un site et dédommage les agents des dégâts éventuels.

Dans ce papier, nous considérons la deuxième type de solution : la prise en charge d'un site collectif polluant par une entreprise en position de monopole. L'environnement économique que nous utilisons est à la fois très différent et complémentaire des modèles de la littérature précédente pour les raisons suivantes :

- le site est collectif et prend la forme d'un bien club : aucun agent du groupe ne peut être exclu de sa consommation;
- les agents du club constituent un marché sur lequel ne peut subsister qu'une seule entreprise;
- le profit de l'entreprise est endogène : l'entreprise va facturer un prix (tarification) aux agents dépendant en partie de la localisation qu'elle choisira et des annonces de dommages environnementaux faites par les agents;
- le coût de construction de l'installation collective est différent d'une localisation à l'autre (par exemple, pour des raisons géographiques).

Nous considérons donc un groupe N composé de n agents qui, pour se procurer une installation collective polluante, va faire appel à une entreprise. Nous supposerons que ce recours a été approuvé par tous les agents dans des discussions préalables. Pour simplifier l'analyse, nous imposons que toute les décisions sont prises à l'unanimité. Cette hypothèse va renforcer le pouvoir de chaque agent durant le processus de négociation avec l'entreprise. Elle suggère également que les protestations locales de chaque agent sont suffisamment fortes pour inciter l'entreprise à tenir compte des préférence des agents et donne ainsi à chaque agent un pouvoir de veto sur le mécanisme de « localisation-tarification » que choisira l'entreprise. Face à ce groupe, l'entreprise en position de monopole va proposer un mécanisme comportant une règle de localisation et une règle de tarification compte tenu de l'information dont elle dispose sur les caractéristiques individuelles des agents et du coût de construction qu'elle associe à chacun des sites potentiels. Pour simplifier, nous supposerons que l'entreprise ne négocie pas directement avec les agents mais avec leur représentant (le syndicat dans l'exemple des communes).

La situation que nous nous proposons d'étudier s'apparente à un problème d'agence commune où n principaux (les communes) contrôlent un unique agent (l'entreprise) (Bernheim et Whinston (1986), Martimort (1992)). Cependant, nous nous plaçons dans un cadre où le représentant des agents agit comme le principal « agrégé » puisqu'il maximise la somme des utilités de tous les agents et respectent leurs contraintes de participation (lié au droit de veto des agents). Laussel et Le Breton (1998) ont appliqué cette problématique au cas particulier d'un bien public parfaitement divisible. En outre, nous nous distinguons de ce modèle de par le caractère indivisible du bien étudié et de par la présence d'effets externes. Enfin, la différence fondamentale avec cette littérature se situe au niveau de la proposition de contrat : dans notre modèle, c'est l'entreprise (l'agent) qui propose un contrat aux agents du groupe (les principaux).

Ce papier est organisé de la manière suivante. En section 2, nous poserons les données du problème en décrivant les caractéristiques individuelles des agents et en détaillant la procédure que proposera l'entreprise. La section 3 sera consacrée à l'analyse du problème général en information incomplète où les agents détiennent de manière privée toute l'information relative à leurs caractéristiques individuelles. Pour se faire, nous utiliserons l'analyse de l'enchère optimale dans un cadre multidimensionnel. Nous donnerons uniquement les grandes lignes des démonstrations de cette section. Tous les détails figurent notamment dans les articles de Armstrong (1996) et Jehiel et al. (1999). La section 4 traitera deux applications issues du cas général. La première présente la situation où les agents sont indifférents au lieu de localisation de l'entreprise, la seconde ne tient compte que des externalités locales. Dans chaque cas, nous caractériserons complètement l'enchère optimale. Nous observerons que le droit de veto des agents force l'entreprise à internaliser les coûts environnementaux qu'elle leur fait subir. Ce phénomène suggère que les agents imposent des « droits à ne pas être polluer » devant être achetés par l'entreprise si elle désire s'installer. La section 5 conclut le papier.

2 Les données du problème

2.1 Les agents

Chaque agent $(i, i \in N)$ est neutre vis-à-vis du risque et tire un bénéfice positif de la mise à disposition du bien : nous noterons ce bénéfice $\gamma_i > 0, \forall i \in N$. A chaque localisation possible, l'agent i associe un coût environnemental différent. Nous appellerons c_i^j le coût environnemental que l'agent i associe à la localisation du site en j. Posons $v_i^j = \gamma_i - c_i^j, \forall i, j \in N$. Cette variable représente la capacité financière maximale à payer de l'agent i lorsque l'installation collective se trouve en j (ou plus simplement la valeur que l'agent i associe à la localisation du bien en j). Le type de l'agent i est alors représenté par un vecteur $v_i = \begin{pmatrix} v_i^1 \\ \vdots \\ v_i^n \end{pmatrix}$.

Chaque agent dispose d'un droit de veto relatif à la localisation choisie par l'entreprise en position de monopole. Il peut faire échouer toute localisation de l'installation s'il n'est pas satisfait du système localisation/tarification proposé par l'entreprise. Ce droit nous permet de représenter de manière formelle les éventuelles protestations locales dues à la localisation de l'installation et force donc l'entreprise à tenir compte des préférences des agents lors de la conception de son mécanisme de localisation/tarification. Il impose également que la règle de décision collective « laisser faire le monopole ou non » est une règle à l'unanimité. Les agents possèdent donc un très fort pouvoir de négociation. Nous formaliserons ce pouvoir de veto de la manière suivante : si le mécanisme proposé par l'entreprise amène chaque agent à un niveau d'espérance d'utilité supérieur à ce qu'il a initialement (nous normaliserons l'espérance d'utilité ex ante à 0) alors chacun abandonne son pouvoir de veto et donne son accord pour le mécanisme proposé. Notons, enfin, que ce pouvoir de veto empêche l'entreprise d'exclure certains agents des bénéfices de l'installation (dans le cadre d'un monopole multiproduit, l'exclusion de certains agents peut être optimale, voir Armstrong (1996)).

2.2 L'entreprise

L'objectif de l'entreprise est de maximiser son profit. Elle a accès à la technologie suffisante pour pouvoir estimer avec précision la valeur du coût de construction de l'installation sur chacun des n sites possibles (un par agent). Nous noterons ce coût $C_j, j \in N$ et admettrons que ce coût est connaissance commune. Les différences de coût de construction sont essentiellement liées aux caractéristiques physiques du site choisi (problèmes géologiques ou géographiques). Nous supposons par ailleurs que la qualité est la même quelle que soit la localisation.

Face aux agents et à leur pouvoir de veto, l'entreprise choisit un mécanisme composé d'une règle de localisation de l'installation et d'une règle de tarification. En information incomplète, l'entreprise fait face à un problème d'asymétries d'information puisqu'elle ne connaît pas les caractéristiques individuelles des agents. Pour éviter de subir le pouvoir de veto des agents, l'entreprise doit connaître au mieux leurs caractéristiques : il lui est alors nécessaire de construire un mécanisme de localisation/tarification incitant les agents à révéler honnêtement leurs caractéristiques. De plus, outre ce droit de veto, l'entreprise sera confrontée à des agents qui vont manipuler stratégiquement l'information qu'ils détiennent : ils sous évalueront leur capacité financière maximale à payer de manière à baisser le prix qu'ils devront payer à l'entreprise. Des possibilités de profit risquent alors de disparaître (l'entreprise ne s'implantera pas alors que cela lui aurait été bénéfique). Ces possibilités de manipulations stratégiques obligent l'entreprise à abandonner une part de son profit pour « financer » une rente informationnelle nécessaire à la révélation des caractéristiques individuelles.

3 Le modèle général

3.1 Formulation du problème

Dans un environnement où l'information est asymétrique, chaque agent détient une information privée sur ses propres caractéristiques mais n'a qu'une appréciation moyenne du type des autres. Chacun émet alors des croyances qui prennent la forme de distributions de probabilités subjectives du type des autres. Sous l'hypothèse d'indépendance des caractéristiques individuelles, ces croyances sont données par : $\forall i \in N, \forall j \in N$, v_i^j est distribué selon une fonction de répartition F_i^j (de densité f_i^j) sur le support compact $[\underline{v}_i^j; \overline{v}_i^j]$.

Le type de chaque agent v_i est distribué, indépendamment du type des autres agents, selon une fonction de répartition F_i (de densité $f_i = \prod_{j=1}^{n} f_i^j$) sur le support compact $V_i = [\underline{v}_i^1; \overline{v}_i^1] \times ... \times [\underline{v}_i^{i-1}; \overline{v}_i^{i-1}] \times [\underline{v}_i^i; \overline{v}_i^i] \times [\underline{v}_i^{i+1}; \overline{v}_i^{i+1}] \times ... \times [\underline{v}_i^n; \overline{v}_i^n]$. Les fonctions de densité f_i, f_i^j (ainsi que les fonctions de répartition associées) et les supports correspondants sont supposés connaissance commune aux agents et à l'entreprise. L'agent i évalue le type des autres agents grâce à une matrice $v_{-i} = (v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$ distribuée selon une fonction de densité $f_{-i} = \prod_{j \neq i} f_j$ sur le support compact $V_{-i} = V_1 \times ... \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times ... \times V_n$.

L'entreprise en position de monopole n'a qu'une appréciation moyenne du type de tous les agents de la communauté. En vertu de l'information dont elle dispose, la probabilité que les types des agents soient représentés par la matrice $v = (v_1, ..., v_n)$ (appartenant au compact $V = V_1 \times ... \times V_n$) est $f(v) = \prod_{i=1}^{n} f_i(v_i)$.

Dans un tel contexte, le choix d'un mécanisme de localisation/tarification est rendu difficile par la présence d'asymétries d'information. Néanmoins, selon le principe de révélation initié par Myerson (1981), nous pouvons, sans pertes de généralités, nous restreindre à la recherche de mécanismes directs révélateurs dans lesquels la stratégie d'équilibre bayésien de chaque agent est l'annonce de leurs vraies caractéristiques et dans lesquels l'allocation finale (i.e. le choix d'une localisation) et les paiements (i.e. la tarification) sont déterminés à partir de ces messages.

Le mécanisme de localisation/tarification de l'entreprise s'interprète donc comme un couple $\{x, p\}$ où :

- $x = (x_1, ..., x_n) \in \xi^n = \{z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}_+^n / \sum_{i=1}^{n} z_i \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant z_i \leqslant 1\}$ est un vecteur de n probabilités de sélection tel que $x : V \to \xi^n$ représente la règle de choix d'une localisation ($x(v)$ la règle de localisation associée à la matrice d'annonce $v \in V$). Nous noterons également $\forall j \in N, x_j : V \to \xi$

la probabilité que l'entreprise se localise en j. Si la règle est déterministe à l'optimum, alors $x_j(v) = 0$ ou $1, \forall j \in N$.

- $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur représentant la tarification appliquée par l'entreprise tel que $\forall i \in N, p_i : V \to \mathbb{R}$ soit le paiement effectué par l'agent i à l'entreprise. Comme la règle de sélection, ce paiement est conditionné par la valeur de la matrice d'annonces $v \in V$. Nous écrirons donc $p(v)$ et $\forall i \in N, p_i(v)$.

L'utilité de chaque agent est additivement séparable. Si l'entreprise choisit un site j, alors l'agent i obtiendra $v_i^j - p_i$. L'espérance d'utilité de l'agent $i, i \in N$, face au mécanisme $\{x, p\}$ proposé par l'entreprise, prend donc la forme suivante :

$$U_i(v_i) = \int_{V_{-i}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j(v_i; v_{-i}) \cdot v_i^j - p_i(v_i; v_{-i}) \right\} f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i} \quad (1)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} X_i^j(v_i) \cdot v_i^j - P_i(v_i) \quad (2)$$

$$= X_i(v_i).v_i - P_i(v_i) \quad (3)$$

avec :

- $X_i^j(v_i) = \int_{V_{-i}} \{x_j(v_i; v_{-i})\} f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i}$ représentant la probabilité espérée de localisation en j sachant que l'agent i est de type v_i ;
- $P_i(v_i) = \int_{V_{-i}} \{p_i(v_i; v_{-i})\} f_{-i}(v_{-i}) dv_{-i}$ représentant l'espérance de paiement de l'agent i ;
- $X_i(v_i) = (X_i^1(v_i), ..., X_i^n(v_i))$ le vecteur des n probabilités espérées de sélection évaluées par l'agent i.

L'objectif de l'entreprise est la maximisation de son profit compte tenu de ses croyances sur les caractéristiques des agents et de la définition du mécanisme $\{x, p\}$. Le profit brut de l'entreprise est uniquement composé des paiements qu'elle reçoit de la part des agents, paiements qui sont fonction de la matrice v d'annonces. Le coût total de l'entreprise est, quant à lui, composé uniquement du coût de construction C_j dépendant du site j choisi. Ainsi, l'objectif de l'entreprise s'écrit :

$$E(\Pi) = \int_V \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(v) - \sum_{j=1}^{n} C_j.x_j(v) \right\} f(v) dv \quad (4)$$

Cet objectif est soumis à trois types de contraintes :

- *Les contraintes de faisabilité* :

$$x(v) \in \xi^n, \forall v \in V \quad (5)$$

- *Les contraintes de rationalité individuelle* mettent en relief le droit de véto dont disposent les agents sur la localisation de l'entreprise. Nous avons donc :

$$U_i(v_i) \geqslant 0, \forall i \in N, \forall v_i \in V_i \quad (6)$$

- *Les contraintes incitatives* expriment le fait que l'annonce des vraies caractéristiques individuelles est la meilleure stratégie d'équilibre bayésien pour chaque agent de la communauté quand les autres agents adoptent une stratégie identique :

$$U_i(v_i) \geqslant U_i(v_i; \hat{v}_i), \forall v_i, \hat{v}_i \in V_i^2 \quad (7)$$

Le programme de maximisation de l'entreprise s'écrit donc :

$$PI = \begin{cases} \max\limits_{x,p} E(\Pi) = \int\limits_V \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(v) - \sum\limits_{j=1}^{n} C_j.x_j(v) \right\} f(v)dv \\ \text{sous les contraintes :} \\ CF : x(v) \in \xi^n, \forall v \in V \\ CRI : U_i(v_i) \geqslant 0, \forall i \in N, \forall v_i \in V_i \\ CI : U_i(v_i) \geqslant U_i(v_i; \hat{v}_i), \forall v_i, \hat{v}_i \in V_i^2 \end{cases}$$

3.2 Propriétés des mécanismes réalisables

L'analyse des contraintes incitatives et de rationalité individuelle (détaillée en annexe) nous permet d'établir les propriétés des mécanismes réalisables (satisfaisant uniquement les contraintes du programme PI).

Proposition 1 *L'ensemble des mécanismes $\{x, p\}$ réalisables satisfait :*

1. $x(v) \in \xi^n, \forall v \in V$
2. $\forall i \in N, \forall v_i \in V_i,$
   $U_i(v_i) = U_i(\underline{v}_i) + \int\limits_0^1 X_i(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i).(v_i - \underline{v}_i)d\alpha$[1]
3. $U_i(\underline{v}_i) \geqslant 0, \forall i \in N$
4. X_i *est cycliquement monotone*

D'après les calculs réalisés en annexe, l'espérance d'utilité $U_i(v_i)$ de chaque agent est non-décroissante en chacun de ses arguments. Ce sens de variation implique que le plus mauvais type de l'agent i (celui obtenant le

[1] α est une variable comprise entre 0 et 1 servant à définir l'ensemble des combinaisons vectorielles des vecteurs v_i et $\underline{v}_i$. Cette transformation sert à définir un chemin possible d'intégration entre les points v_i et $\underline{v}_i$ appartenant au compact V_i dans l'espace de dimension n.

plus bas niveau d'utilité) est $\underline{v}_i = \begin{pmatrix} \underline{v}_i^1 \\ \vdots \\ \underline{v}_i^n \end{pmatrix}$ composé des plus basses capacités financières à payer.

D'après la définition de l'espérance d'utilité, la condition 2 de la proposition 1 peut se réécrire, $\forall v_i \in V_i, \forall i \in N$:

$$P_i(v_i) = X_i(v_i) \cdot v_i - U_i(\underline{v}_i) - \int_0^1 X_i(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i).(v_i - \underline{v}_i)d\alpha \quad (8)$$

L'espérance de paiement de chaque agent est entièrement définie par la règle de sélection et par l'espérance d'utilité du plus mauvais agent (apparaissant comme une constante additive). Nous obtenons une expression du théorème d'équivalence-revenu dans le cadre multidimensionnel d'un monopole prenant en charge un site collectif polluant : si deux mécanismes incitatifs disposent de la même règle de sélection, alors les espérances d'utilité (et les paiements obtenus par un agent) issues de chacun des mécanismes diffèrent tout au plus d'une constante additive (Krishna et Perry (1997)).

La condition 2 fait également apparaître la rente informationnelle (représentée par l'intégrale) que chaque agent obtient en échange de la révélation honnête de ses caractéristiques. Cette rente se décompose en n rentes correspondant chacune à l'une des caractéristiques de l'agent i (une pour chaque v_i^j). L'agent i obtient toujours une rente informationnelle : ceci est bien entendu dû au caractère multidimensionnel du type des agents. Le caractère incitatif du mécanisme est donc très coûteux pour l'entreprise.

La condition 3 exprime le fait que, lorsque le mécanisme est incitatif, l'ensemble des contraintes de rationalité individuelle se résume à une seule, celle portant sur le plus mauvais type.

La cyclicité monotone de X_i (condition 4) est à rapprocher des arguments monodimensionnels garantissant que la condition incitative est globale. Dans un cadre monodimensionnel (et sous des hypothèses appropriées) où un vendeur vend un bien à n acheteurs potentiels, la condition incitative globale (ou tout simplement condition du second ordre) spécifie que la règle d'attribution de l'objet est non-décroissante par rapport à la valeur monétaire annoncée par un agent quelconque. La non-décroissance de la règle d'attribution garantit que l'espérance d'utilité associée à la vérité (fonction de valeur maximale) est convexe (sa dérivée seconde est positive de par la non-décroissance de la règle d'attribution). Ceci implique également que la condition du second ordre associée au problème d'optimisation de chaque agent est satisfaite. La dérivée seconde de l'espérance d'utilité d'un agent quelconque lorsqu'il annonce un mensonge est négative au point où le mensonge égale la vérité. La révélation de la vérité est la meilleure stratégie de chaque agent face au mécanisme proposé par le vendeur : la condition incitative est donc globale. Dans un cadre mulidimensionnel, ces résultats sont garantis par la cyclicité monotone du vecteur X_i (voir Lescop (2000) pour une présentation détaillée).

3.3 Recherche des mécanismes optimaux

Intuitivement, les mécanismes optimaux sont les mécanismes réalisables maximisant l'objectif de l'entreprise. Mathématiquement, ce sont les solutions du programme suivant (noté PII) :

$$PII = \begin{cases} \max\limits_{x,p} E(\Pi) = \displaystyle\int_V \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(v) - \sum_{i=1}^{n} C_j . x_j(v) \right\} f(v) dv \\ \text{sous les contraintes :} \\ \begin{cases} 1.\ x(v) \in \xi^n, \forall v \in V \\ 2.\ \forall v_i \in V_i, \forall i \in N, \\ U_i(v_i) = U_i(\underline{v}_i) + \displaystyle\int_0^1 X_i(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i).(v_i - \underline{v}_i) d\alpha \\ 3.\ U_i(\underline{v}_i) \geqslant 0, \forall i \in N \\ 4.\ X_i \text{ est cycliquement monotone} \end{cases} \end{cases}$$

Même dans un cadre multidimensionnel, la recherche des mécanismes optimaux demeure relativement classique. Le premier pas de l'analyse consiste à reporter la condition 2 (contrainte d'égalité forcément satisfaite à l'optimum) dans la fonction objectif de l'entreprise.

L'objectif de l'entreprise se réécrit :

$$\begin{aligned} E(\Pi) = & \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{V_i} \left\{ P_i(v_i) - \sum_{j=1}^{n} X_i^j(v_i) \cdot v_i \right\} f_i(v_i) dv_i \right\} \\ & + \int_V \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_j(v).v_i^j \right\} - C_j . x_j(v) \right\} f(v) dv \qquad (9) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{V_i} \{-U_i(v_i)\} f_i(v_i) dv_i \right\} \\ & + \int_V \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left\{ v_i^j - C_j \right\} \cdot x_j(v) \right\} f(v) dv \qquad (10) \end{aligned}$$

En reportant la condition 2 dans (10) et en arrangeant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E(\Pi) = & - \sum_{i=1}^{n} U_i(\underline{v}_i) - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{V_i} \left\{ \int_0^1 X_i(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i) \cdot (v_i - \underline{v}_i) d\alpha \right\} f_i(v_i) dv_i}_{A} \\ & + \int_V \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left\{ v_i^j - C_j \right\} \cdot x_j(v) \right\} f(v) \qquad (11) \end{aligned}$$

Dans un cadre monodimensionnel, la simplification de la partie A de (11) passe par une intégration par parties permettant d'exprimer l'intégrale en fonction de la règle de sélection et du taux de hasard associé à la densité de probabilité des évaluations. L'analyse multidimensionnelle complique énormément ce travail et ne permet pas de faire apparaître directement le résultat. Cependant, conformément à l'analyse proposée par Armstrong (1996), il est possible, en employant le changement de variable appropriée, de faire apparaître une sorte « d'intégration par parties » multidimensionnelle[2].

Reprenons A :

$$A = \int_{V_i} \left\{ \int_0^1 X_i(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i).(v_i - \underline{v}_i) d\alpha \right\} f_i(v_i) dv_i$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_{V_i} X_i(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i) \cdot (v_i - \underline{v}_i) f_i(v_i) dv_i \right\} d\alpha \quad (12)$$

Nous posons une nouvelle variable s_i telle que $s_i = \alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i$ (soit $v_i = \frac{s_i - \underline{v}_i}{\alpha} + \underline{v}_i$). Alors $ds_i = \alpha^n dv_i$, soit $dv_i = \frac{1}{\alpha^n} ds_i$. Nous remarquons que le domaine de définition de s_i est le même que celui de v_i (à savoir V_i) puisque quel que soit $\alpha \in [0;1]$, $s_i \in V_i$. Nous avons donc :

$$A = \int_0^1 \left\{ \int_{V_i} X_i(s_i) \cdot \left(\frac{s_i - \underline{v}_i}{\alpha} \right) f_i \left(\frac{s_i - \underline{v}_i}{\alpha} + \underline{v}_i \right) \frac{1}{\alpha^n} ds_i \right\} d\alpha \quad (13)$$
$$= \int_{V_i} X_i(s_i) \cdot (s_i - \underline{v}_i) \int_0^1 \left\{ \frac{f_i(\frac{s_i - \underline{v}_i}{\alpha} + \underline{v}_i)}{\alpha^{n+1}} \right\} d\alpha ds_i \quad (14)$$

Appliquons un nouveau changement de variable à l'équation précédente. Soit $t = \frac{1}{\alpha}$ alors nous avons $dt = -\frac{1}{\alpha^2} d\alpha$ ($d\alpha = -\frac{1}{t^2} dt$). La borne 0 devient alors $+\infty$ et la borne 1 devient 1. Nous obtenons donc :

$$\int_0^1 \left\{ \frac{f_i(\frac{v_i - \underline{v}_i}{\alpha} + \underline{v}_i)}{\alpha^{n+1}} \right\} d\alpha = \int_1^{+\infty} \left\{ f_i(t(v_i - \underline{v}_i) + \underline{v}_i) t^{n-1} \right\} dt \quad (15)$$

Finalement, il vient puisque s_i et v_i ont le même domaine de définition :

$$A = \int_{V_i} X_i(v_i).(v_i - \underline{v}_i) \int_1^{+\infty} \left\{ f_i(t(v_i - \underline{v}_i) + \underline{v}_i) t^{n-1} \right\} dt dv_i$$
$$= \int_V \left\{ \sum_{j=1}^n x_j(v) \cdot (v_i^j - \underline{v}_i^j) g_i(v_i) \right\} f(v) dv \quad (16)$$

[2] Armstrong ((1996), preuve de la proposition 1) et Jehiel et al. (1997) proposent une démonstration plus complète utilisant le théorème de la divergence. Toutefois, les résultats sont identiques avec les deux méthodes.

avec

$$g_i(v_i) = \frac{\int_1^{+\infty} \left\{ f_i(tv_i + (1-t)\underline{v}_i)t^{n-1} \right\} dt}{f_i(v_i)}$$

L'espérance de profit de l'entreprise se réécrit donc après arrangements :

$$E(\Pi) = \int_V \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^{n} (v_i^j - (v_i^j - \underline{v}_i^j) g_i(v_i)) - C_j \right\} \cdot x_j(v) \right\} f(v)dv - \sum_{i=1}^{n} U_i(\underline{v}_i) \tag{17}$$

L'objectif de l'entreprise est de maximiser son profit : ceci implique nécessairement qu'à l'optimum $U_i(\underline{v}_i) = 0, \forall i \in N$. La contrainte de rationalité de l'agent disposant du plus mauvais type est donc saturée à l'optimum. Le programme final de l'entreprise ne dépend plus que de la règle de localisation x :

$$PIII = \begin{cases} \max_x E(\Pi) = \int_V \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^{n} (v_i^j - (v_i^j - \underline{v}_i^j) g_i(v_i)) - C_j \right\} \cdot x_j(v) \right\} f(v)dv \\ \text{sous les contraintes :} \\ \begin{cases} 1.\ x(v) \in \xi^n, \forall v \in V \\ 3.\ U_i(\underline{v}_i) = 0, \forall i \in N \\ 4.\ X_i \text{ est cycliquement monotone} \end{cases} \end{cases}$$

Proposition 2 *Si la règle x maximise $E(\Pi)$ et satisfait les conditions 1,3 et 4 du programme $PIII$, alors x est la règle optimale de localisation de l'entreprise.*

La définition du mécanisme optimal nécessite une étude au cas par cas à cause de la condition du second ordre représentée par la cyclicité monotone du vecteur X_i dépendant en partie de la forme des croyances des agents (des cas particuliers sont exposés dans l'article de Armstrong (1996)). Vu le programme $PIII$, nous pouvons néanmoins anticiper que la maximisation du profit de l'entreprise résultera notamment d'un arbitrage optimal entre son propre coût de localisation et les dommages environnementaux subis par les agents. Une première conclusion se dégage par ailleurs. Si $\forall j \in N$, $\sum_{i=1}^{n} (v_i^j - (v_i^j - \underline{v}_i^j) g_i(v_i)) < C_j$ alors l'entreprise ne s'implantera pas, puisque, quelle que soit la localisation choisie, son profit sera négatif. Une autre difficulté réside dans la monotonie des prix virtuels $v_i^j - (v_i^j - \underline{v}_i^j) g_i(v_i)$ liés à la monotonie de la variable $g_i(v_i)$: si ces prix virtuels ne sont pas monotones alors nous ne pourrons pas caractériser une règle de sélection cohérente (elle-même monotone par rapport aux annonces des agents).

Le mécanisme optimal de localisation/tarification de l'entreprise implique que la contrainte de rationalité individuelle de l'agent disposant du plus mauvais type est saturée. Ceci implique nécessairement :

$$P_i(\underline{v}_i) = -X_i(\underline{v}_i) \cdot \underline{v}_i, \forall i \in N \tag{18}$$

Le plus mauvais agent de la communauté paiera donc à l'entreprise un transfert égal à sa capacité financière maximale à payer.

D'après la définition de l'espérance d'utilité et la condition 3 du programme $PIII$, le paiement espéré de l'agent i de type v_i s'écrit, $\forall v_i \in V_i, \forall i \in N$:

$$P_i(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ -X_i^j(v_i).v_i^j + \int_0^1 X_i^j(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i).(v_i^j - \underline{v}_i^j) d\alpha \right\} \quad (19)$$

Le paiement espéré de chaque agent est donc entièrement défini par la règle de localisation de l'entreprise et par ses capacités financières maximales à payer. Cela implique nécessairement que l'entreprise internalise les coûts environnementaux qu'elle fait subir aux agents. D'après (19), la rente de l'agent i quand l'entreprise se localise en j s'écrit :

$$\int_0^1 X_i^j(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i) \cdot (v_i^j - \underline{v}_i^j) d\alpha \quad (20)$$

Cette valeur est positive et ce quel que soit le signe de v_i^j. Par conséquent, si l'agent i a une capacité financière maximale à payer négative lorsque le site se localise en j ($\underline{v}_i^j < 0$ i.e. $\gamma_i < c_i^j$: le coût lié aux externalités dépasse la valeur du bénéfice individuel), alors $-X_i^j(v_i).v_i^j > 0$. Dans ce cas, c'est l'entreprise qui devra verser un paiement positif à l'agent i si elle choisit de se localiser en j.

En information complète, nous pouvons facilement déterminer que l'implantation de l'entreprise aura lieu s'il existe une localisation j telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ v_i^j \right\} - C_j \geqslant 0 \text{ et telle que } \sum_{i=1}^{n} \left\{ v_i^j \right\} - C_j = \max_{l \in N} \{ \sum_{i=1}^{n} \{ v_i^l \} - C_l \} \quad (21)$$

Cette solution constitue l'optimum de premier rang. Supposons qu'en information incomplète, l'entreprise sélectionne cette même localisation. Son profit sera alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ (v_i^j - (v_i^j - \underline{v}_i^j) g_i(v_i)) \right\} - C_j \quad (22)$$

Comme $g_i(v_i) \geqslant 0$ (par définition) et $(v_i^j - \underline{v}_i^j) \geqslant 0, \forall i \in N$, il vient naturellement que :

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ (v_i^j - (v_i^j - \underline{v}_i^j) g_i(v_i)) \right\} - C_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{ (v_i^j - C_j \right\} \quad (23)$$

En retour, pour une localisation j donnée, la somme des prix virtuels est toujours inférieure à la somme des capacités financières maximales à payer des agents. En information incomplète, une condition nécessaire pour que l'entreprise s'implante est qu'il existe au moins une localisation j telle que :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{(v_i^j - (v_i^j - \underline{v}_i^j)g_i(v_i))\right\} - C_j \geqslant 0 \tag{24}$$

Cette condition implique l'existence d'inefficacités allocatives. En effet, supposons qu'il n'existe aucun agent i tel que $\sum_{j=1}^{n}\left\{(v_j^i - (v_j^i - \underline{v}_j^i)g_j(v_j))\right\} - C_i \geqslant 0$. D'après (23), nous pouvons avoir $\sum_{j=1}^{n}\left\{v_j^i\right\} - C_i \geqslant 0$. L'entreprise décide alors de ne pas s'implanter puisqu'elle obtiendrait un profit négatif. Or, comme $\sum_{j=1}^{n}\left\{v_j^i\right\} - C_i \geqslant 0$, il existe des possibilités d'implantations permettant d'augmenter le surplus collectif (puisque la somme des capacités maximales à payer des agents est supérieure au coût de construction de l'installation). La perte de profit due au versement des rentes informationnelles aux agents force donc l'entreprise à abandonner des possibilités de localisation qui seraient bénéfiques aussi bien pour elle que pour les agents de la communauté : ceci constitue donc des inefficacités parétiennes relatives à la perte d'opportunité de profits mutuels.

4 Deux exemples de résolution complète

La section précédente donne des résultats généraux mais ne nous permet pas de caractériser l'enchère optimale associée à notre problème. Dans cette section, nous analyserons deux situations pour lesquels la détermination complète de l'enchère optimale est possible : l'une où tous les agents obtiennent une compensation pour les dommages subis (externalités diffuses ou capacité financière indépendante de la localisation) et l'autre, très classique, où un seul agent est compensé (externalités locales). Dans le premier cas, le problème se simplifie à l'extrême puisque ce ne sont pas les agents qui influeront sur la localisation exacte (ils agiront sur la fourniture ou non du bien mais pas sur son emplacement) mais l'entreprise uniquement par l'intermédiaire de son coût. Dans le second, c'est l'inverse : les dommages locaux annoncés par les agents influeront sur l'emplacement exacte et le coût de l'entreprise sur la fourniture ou non du bien.

4.1 Externalités diffuses

La simplification que nous proposons dans cette sous-section correspond au cas de figure où les agents subissent la même externalité quelle que soit la localisation choisie par l'entreprise : la capacité financière maximale à payer de l'agent est alors indépendante de la localisation du site, soit $v_i^j = v_i^k, \forall j, k \in N$. L'analyse devient alors monodimensionnelle et nous appellerons w_i la valeur de la capacité financière maximale de l'agent i : $w_i = v_i^j = v_i^k, \forall j, k \in N$. Nous supposerons que w_i est une information privée de l'agent i. Les autres agents n'ont qu'une appréciation moyenne de w_i et ils supposent que w_i est distribué selon une densité f_i (F_i étant la fonction de répartition associée) sur l'intervalle compact $W_i = [\underline{w}_i; \overline{w}_i]$. L'entreprise, quant à elle, n'a qu'une appréciation moyenne du type de tous les agents : elle évalue ces types grâce à un vecteur $w = (w_1, ..., w_n)$ de densité de probabilité $f(w) = \prod_{i=1}^{n} f_i(w_i)$ sur le support compact $W = W_1 \times ... \times W_n$.

Le retour à une seule dimension va impliquer des changements remarquables sur le programme final de l'entreprise $PIII$. Nous modifions tout d'abord les contraintes. La matrice v devient un vecteur w de dimension n tel que $w = (w_1, ..., w_n)$. La condition 1 se réécrit : $x(w) \in \xi, \forall w \in W$. La condition 3 devient : $U_i(\underline{w}_i) = 0, \forall i \in N$.

La cyclicité monotone de X_i va être remplacée par une seule inégalité. En effet, X_i est le vecteur gradient de $U_i(v_i)$. Avec les nouvelles données, l'espérance d'utilité de l'agent i de type w_i lorsqu'il fait une annonce $\hat{w}_i$ va s'écrire :

$$U_i(w_i, \hat{w}_i) = w_i \sum_{j=1}^{n} X_i^j(\hat{w}_i) - P_i(\hat{w}_i), \forall i \in N, \forall w_i, \hat{w}_i \in W_i^2 \qquad (25)$$

En utilisant le théorème de l'enveloppe, la dérivée de $U_i(w_i)$ en w_i va être $\sum_{j=1}^{n} X_i^j(w_i)$. La cyclicité monotone de X_i est alors remplacée par :

$$\frac{d\left(\sum_{j=1}^{n} X_i^j(w_i)\right)}{dw_i} \geqslant 0, \forall i \in N \qquad (26)$$

Or, $\sum_{j=1}^{n} X_i^j(w_i)$ représente la probabilité de localisation de l'entreprise au sein de la communauté N : cette condition implique donc que la probabilité de localisation de l'entreprise est non-décroissante en w_i sur l'intervalle compact W_i.

Il nous reste donc à modifier le profit de l'entreprise. En prenant les nouvelles données, il vient :

$$E(\Pi) = \int_W \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^{n} (w_i - (w_i - \underline{w}_i) g_i(w_i)) - C_j \right\} \cdot x_j(w) \right\} f(w) dw \qquad (27)$$

Or, dans le cadre multidimensionnel (de dimension n),

$$g_i(v_i) = \frac{\int_1^{+\infty} \left\{ f_i(tv_i + (1-t)\underline{v}_i) t^{n-1} \right\} dt}{f_i(v_i)}, \forall i \in N, \forall v_i \in V_i$$

Ici, nous avons $n = 1$, et $v_i = w_i$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} g_i(w_i) &= \frac{\int_1^{+\infty} \left\{ f_i(tw_i + (1-t)\underline{w}_i) t^{1-1} \right\} dt}{f_i(w_i)} \\ &= \frac{(1 - F_i(w_i))}{f_i(w_i)} \cdot \frac{1}{(w_i - \underline{w}_i)} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (27), il vient finalement :

$$E(\Pi) = \int_W \sum_{j=1}^n \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^n \left(w_i - \frac{(1 - F_i(w_i))}{f_i(w_i)} \right) - C_j \right\} \cdot x_j(w) \right\} f(w)dw \tag{30}$$

Nous avons donc fait apparaître des prix virtuels plus classiques $(w_j - \frac{(1-F_j(w_j))}{f_j(w_j)})$. Le programme de l'entreprise devient donc dans ce nouveau cadre monodimensionnel :

$$PIV = \begin{cases} \max\limits_x E(\Pi) = \int_W \sum_{j=1}^n \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^n \left(w_i - \frac{(1 - F_i(w_i))}{f_i(w_i)} \right) - C_j \right\} \cdot x_j(w) \right\} f(w)dw \\ \text{sous les contraintes :} \\ \begin{cases} 1.\ x(w) \in \xi, \forall w \in W \\ 3.\ U_i(\underline{w}_i) = 0, \forall i \in N \\ 4.\ \sum\limits_{j=1}^n X_i^j(w_i) \text{ non décroissante en } w_i \text{ sur le compact } W_i \end{cases} \end{cases}$$

L'entreprise maximise son profit si et seulement si :

- $x_j^*(w) = 0, \forall j \in N$ si $\sum_{i=1}^n (w_i - \frac{(1-F_i(w_i))}{f_i(w_i)}) - C_j < 0, \forall j \in N$: l'entreprise décide de ne pas s'implanter si, pour toutes les localisations possibles, la somme des prix virtuels est inférieure au coût de construction. Nous noterons $r_i(w_i) = w_i - \frac{(1-F_i(w_i))}{f_i(w_i)}$ le prix virtuel associé à l'agent i.
- $x_j^*(w) = 1$, si $\sum_{i=1}^n (w_i - \frac{(1-F_i(w_i))}{f_i(w_i)}) - C_j \geqslant 0$ et si $\sum_{i=1}^n (r_i(w_i) - C_j) = \max\limits_{l \in N} \left\{ \sum_{i=1}^n r_i(w_i) - C_l \right\}$ ce qui revient à $C_j = \min\limits_{l \in N}\{C_l\}$: le deuxième volet

de la règle relative au coût de construction provient du fait que les externalités que subissent les agents sont indépendantes de la localisation choisie.

Cette règle satisfait bien la contrainte 1 du programme PIV. De plus, sous l'hypothèse de croissance de $r_i(w_i)$ par rapport à w_i, elle satisfait également la contrainte de non-décroissance de la probabilité de localisation de l'entreprise par rapport à w_i. Nous remarquons que cette règle est également non-croissante par rapport au coût de construction de l'installation. Ainsi, nous constatons que les caractéristiques individuelles des agents ont une influence directe sur la probabilité de localisation de l'entreprise (à savoir $\sum_{j=1}^{n} x_j(w)$) alors que le coût de construction influe directement sur le choix d'une localisation particulière de l'entreprise (à savoir $x_j(w)$) : ceci reflète le fait que les agents sont indifférents à la localisation choisie pour le site alors que l'entreprise, quant à elle, n'est pas indifférente à la localisation (puisque les coûts de construction sont différents).

Il nous reste à déterminer les paiements associés à cette solution. Le paiement espéré d'un agent i s'écrit par définition :

$$P_i(w_i) = w_i \sum_{j=1}^{n} X_i^j(w_i) - U_i(w_i), \forall i \in N, \forall w_i \in W_i \tag{31}$$

Or, d'après l'analyse multidimensionnelle du problème (condition 2 du programme PII), et, en reportant les nouvelles données monodimensionnelles, il vient, $\forall w_i \in W_i, \forall i \in N$:

$$U_i(w_i) = \underbrace{U_i(\underline{w}_i)}_{=0} + \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} X_i^j(\alpha w_i + (1-\alpha)\underline{w}_i) \cdot (w_i - \underline{w}_i) d\alpha \tag{32}$$

$$= \int_{\underline{w}_i}^{w_i} \sum_{j=1}^{n} X_i^j(s_i) ds_i = \int_{W_{-i}} \int_{\underline{w}_i}^{w_i} \sum_{j=1}^{n} x_j(s_i; w_{-i}) ds_i f_{-i}(w_{-i}) dw_{-i} \tag{33}$$

La deuxième égalité provient du fait que l'analyse est monodimensionnelle (les deux intégrales sont alors équivalentes). Le paiement espéré de l'agent i s'écrit donc, $\forall i \in N, \forall w_i \in W_i$:

$$P_i(w_i) = E_{-i}(p_i^*(w_i; w_{-i}))$$
$$= \int_{W_{-i}} \left\{ w_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^*(w_i; w_{-i}) - \int_{\underline{w}_i}^{w_i} \sum_{j=1}^{n} x_j^*(s_i; w_{-i}) ds_i \right\} f_{-i}(w_{-i}) dw_{-i} \tag{34}$$

Nous en déduisons donc que, $\forall i \in N, \forall w \in W$:

$$p_i^*(w) = w_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^*(w) - \int_{\underline{w}_i}^{w_i} \sum_{j=1}^{n} x_j^*(s_i; w_{-i}) ds_i, \tag{35}$$

Proposition 3 *Lorsque les agents sont indifférents à la localisation du site polluant et sous l'hypothèse de croissance de $r_i(w_i)$ en w_i, le mécanisme optimal $\{x^*, p^*\}$ est donné par, $\forall w \in W$:*

1. $x_j^*(w) = 0, \forall j \in N$ *si* $\sum_{i=1}^{n} \{r(w_i)\} - C_j < 0, \forall j \in N$
2. $x_j^*(w) = 1$, *si* $\sum_{i=1}^{n} \{(r(w_i)\} - C_j \geqslant 0$ *et si* $C_j = \min_{l \in N}\{C_l\}$
3. $p_i^*(w) = w_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^*(w) - \int_{\underline{w}_i}^{w_i} \sum_{j=1}^{n} x_j^*(s_i; w_{-i}) ds_i, \forall i \in N$

Nous constatons à nouveau la présence d'inefficacités allocatives. En effet, le paiement versé par chaque agent à l'entreprise en information incomplète est inférieur à leur capacité financière maximale à payer ($w_j > r(w_j)$).

Soit k la localisation telle que $C_k = \min_{l \in N}\{C_l\}$. Ce résultat est connu ex post de tous puisque les coûts de construction sont, par hypothèse, connaissance commune. De fait, la règle de sélection se réduit à :

$$\begin{cases} x_k^*(w) = 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} \{(r(w_i)\} - C_k \geqslant 0 \\ x_k^*(w) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{36}$$

Par suite, les paiements associés à la règle de sélection réduite s'écrivent, $\forall i \in N$:

$$p_i^*(w) = w_i \cdot x_k^*(w) - \int_{\underline{w}_i}^{w_i} x_k^*(s_i; w_{-i}) ds_i \tag{37}$$

Posons la valeur suivante, $\forall i \in N$:

$$\tilde{w}_i^k = \{\inf w_i / r_i(w_i) + \sum_{l \neq i} r(w_l) - C_k \geqslant 0\} \tag{38}$$

Alors, toutes choses égales par ailleurs, l'entreprise s'implantera en k ($x_k^*(w) = 1$)) si $w_i \geqslant \tilde{w}_i^k$, et ne s'implantera pas, si $w_i < \tilde{w}_i^k$. Nous avons donc :

$$\begin{cases} x_k^*(s_i; w_{-i}) = 1 & \text{si } s_i \geqslant \tilde{w}_i^k \\ x_k^*(s_i; w_{-i}) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{39}$$

Au total,

$$p_i^*(\omega) = \begin{cases} w_i \cdot x_k^*(w) - \int_{\underline{w}_i}^{w_i} x_k^*(s_i; w_{-i}) ds_i = \tilde{w}_i^k & \text{si } x_k(w) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{40}$$

En d'autres termes, chaque agent verse un paiement à l'entreprise égal à la plus faible valeur de la capacité financière maximale à payer qu'il pourrait annoncer sans faire changer la décision d'implantation de l'entreprise.

Ce paiement est dans l'esprit des mécanismes de Clarke-Vickrey-Groves ((1971), (1961), (1973)) : chaque agent paie en fonction de son influence sur le résultat économique final (implantation ou non de l'entreprise). Étant donné que chaque agent obtient une rente informationnelle (paie un prix ajusté inférieur à sa capacité financière), le caractère incitatif est très coûteux pour l'entreprise.

4.2 Externalités locales

Dans cette sous-section, nous simplifions le problème à l'extrême en supposant que : les externalités sont essentiellement locales, soit $c_i^j = 0, \forall j \neq i$; le bénéfice individuel de chaque agent est connaissance commune; le coût de l'entreprise est le même quelle que soit la localisation, soit $C_j = C, \forall j \in N$. Par conséquent, $\forall i \in N$, l'unique variable pertinente devient c_i^i représentant le dommage environnemental local de l'agent i. Cette variable constitue également l'information privée de l'agent i. Dans un contexte où les valeurs privées sont indépendantes, chaque agent i connaît parfaitement son dommage local c_i^i et évalue le type des autres grâce à un vecteur $c_{-i} = (c_1^1, ..., c_{i-1}^{i-1}, c_{i+1}^{i+1}, ..., c_n^n)$ distribué selon une fonction de répartition F_{-i} (de densité associée $f_{-i} = \prod_{j \neq i} f_j$) sur le compact $\Theta_{-i} = \Theta_1 \times ... \times \Theta_{i-1} \times \Theta_{i+1} \times ... \times \Theta_n$ avec $\Theta_j = [\underline{c}_j^j; \overline{c}_j^j]$. L'entreprise ne dispose que d'une information moyenne sur l'ensemble des dommages environnementaux locaux des agents de la communauté. Elle évalue ces dommages par un vecteur $c = (c_1^1, ..., c_n^n)$ distribué selon une fonction de répartition F (de densité $f = \prod_{i=1}^{n} f_j^j$) sur le compact $\Theta = \Theta_1 \times ... \times \Theta_n$.

Nous opérons, à l'instar, de la sous section précédente un retour à une analyse monodimensionnelle plus traditionnelle. Les nouvelles données nous permettent d'établir que l'espérance d'utilité de l'agent i de type c_i^i lorsqu'il fait une annonce $\hat{c}_i^i$ va s'écrire :

$$U_i(c_i^i, \hat{c}_i^i) = \gamma_i \cdot \sum_{j=1}^{n} X_i^j(\hat{c}_i^i) - c_i^i \cdot X_i^i(\hat{c}_i^i) - P_i(\hat{c}_i^i), \forall i \in N, \forall c_i^i, \hat{c}_i^i \in \Theta_i^2 \quad (41)$$

Grâce au théorème de l'enveloppe appliqué au programme d'optimisation $\max_{\hat{c}_i^i \in \Theta_i} \{U_i(c_i^i, \hat{c}_i^i)\}$, nous savons que la dérivée de $U_i(c_i^i)$ en c_i^i va être $-X_i^i(c_i^i)$. L'espérance d'utilité de l'agent i est donc non-croissante en c_i^i : le plus mauvais type de l'agent i est donc $\overline{c}_i^i$. La cyclicité monotone de X_i est alors remplacée par $-\frac{dX_i^i(c_i^i)}{dc_i^i} \geqslant 0$ soit $\frac{dX_i^i(c_i^i)}{dc_i^i} \leqslant 0$, $\forall i \in N$. Cette condition suggère donc que la probabilité de localisation de l'entreprise en j est non-croissante en c_j^j sur l'intervalle compact Θ_j.

Le profit de l'entreprise devient :

$$E(\Pi) = \int_\Theta \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i - c_j^j + (c_j^j - \overline{c}_j^j) g_j(c_j^j) - C \right\} \cdot x_j(c) \right\} f(c)dc \quad (42)$$

Le signe « plus » devant $g_j(c_j^j)$ provient du sens de variation[3] de $U_i(c_i^i)$ en c_i^i.

Or, avec les nouvelles données,

$$g_i(c_i^i) = \frac{\int_1^{+\infty} \{ f_i^i(tc_i^i + (1-t)\overline{c}_i^i) t^{1-1} \} \, dt}{f_i^i(c_i^i)} = -\frac{F_i^i(c_i^i)}{f_i^i(c_i^i)} \cdot \frac{1}{(c_i^i - \underline{c}_i^i)} \quad (43)$$

En reportant dans (42), il vient :

$$E(\Pi) = \int_\Theta \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i - c_j^j - \frac{F_j^j(c_j^j)}{f_j^j(c_j^j)} - C \right\} \cdot x_j(c) \right\} f(c)dc$$

Nous avons donc fait apparaître des valeurs virtuelles classiques $(c_j^j + \frac{F_j^j(c_j^j)}{f_j^j(c_j^j)})$. Le programme de l'entreprise devient donc :

$$PIV' = \begin{cases} \max_x E(\Pi) = \int_\Theta \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i - c_j^j - \frac{F_j^j(c_j^j)}{f_j^j(c_j^j)} - C \right\} \cdot x_j(c) \right\} f(c)dc \\ \text{sous les contraintes :} \\ \begin{cases} 1'. \ \sum_{j=1}^{n} x_j(c) \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x_j(c) \leqslant 1, \forall j \in N, \forall c \in \Theta \\ 3'. \ U_i(\overline{c}_i^i) = 0, \forall i \in N \\ 4'. \ X_j^j(c_j^j) \text{ non croissante en } c_j^j \text{ sur le compact } \Theta_i \end{cases} \end{cases}$$

L'entreprise va maximiser son profit en adoptant une règle d'implantation telle que :

- $x_j^*(c) = 0, \forall j \in N$ si $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i - c_j^j - \frac{F_j^j(c_j^j)}{f_j^j(c_j^j)} < C, \forall j \in N$: l'entreprise refuse de prendre en charge le site collectif si son profit est négatif quelle que

[3] En fait, dans le cas général, nous avons raisonné sur le vecteur de probabilité $X_i(v_i) = (X_i^1(v_i), ..., X_i^n(v_i))$ qui, dans notre nouvelle environnement, devient l'espérance de probabilité $-X_i^i(v_i^i)$: il nous faut alors ajouter ce signe « plus » pour que le passage du programme général au programme monodimensionnel soit juste.

soit la localisation. Nous noterons $r_j(c_j^j) = c_j^j + \frac{F_j^j(c_j^j)}{f_j^j(c_j^j)}$ la valeur virtuelle du dommage environnemental local de l'agent j.

- $x_j^*(c) = 1$, si $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i - r_j(c_j^j) \geqslant C$ et si $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i - r_j(c_j^j) - C = \max_{l \in N} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i - r_l(c_l^l) - C \right\}$ ce qui revient à : $r_j(c_j^j) = \min_{l \in N} \{r(c_l^l)\}$.

Cette règle vérifie la contrainte $1'$ du programme PIV'. Sous l'hypothèse de croissance de $r_j(c_j^j)$ par rapport à c_j^j, elle garantit également la non-croissance de la probabilité de localisation de l'entreprise en j par rapport à c_j^j. Cette hypothèse nous permet également d'affirmer que choisir la localisation j tel que $r_j(c_j^j) = \min_{l \in N}\{r_j(c_l^l)\}$ revient à choisir j si $c_j^j = \min_{l \in N}\{c_l^l\}$

Le paiement espéré d'un agent i s'écrit, $\forall i \in N, \forall c_i^i \in \Theta_i$:

$$P_i(c_i^i) = \gamma_i \cdot \sum_{j=1}^{n} X_i^j(c_i^i) - c_i^i . X_i^i(c_i^i) - U_i(c_i^i)$$

Or, selon la condition 2 du programme PII, et, en reportant les nouvelles données, il vient, $\forall i \in N, \forall c_i^i \in \Theta_i$:

$$U_i(c_i^i) = \int_{c_i^i}^{\overline{c}_i^i} X_i^i(s_i) ds_i = \int_{\Theta_{-i}} \int_{c_i^i}^{\overline{c}_i^i} x_i(s_i; c_{-i}) ds_i f_{-i}(c_{-i}) dc_{-i} \tag{44}$$

En reportant dans la définition de $P_i(c_i^i)$ et en développant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_i(c_i^i) =& E_{-i}(p_i^*(c_i^i; c_{-i})) \\ =& \int_{\Theta_{-i}} \left\{ \gamma_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^*(c_i^i; c_{-i}) - c_i^i \cdot x_i^*(c_i^i; c_{-i}) \right. \\ & \left. - \int_{c_i^i}^{\overline{c}_i^i} x_i^*(s_i; c_{-i}) ds_i \right\} f_{-i}(c_{-i}) dc_{-i} \end{aligned} \tag{45}$$

Nous en déduisons donc que, $\forall i \in N, \forall c \in \Theta$:

$$p_i(c) = \gamma_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^*(c) - c_i^i . x_i^*(c) - \int_{c_i^i}^{\overline{c}_i^i} x_i^*(s_i; c_{-i}) ds_i \tag{46}$$

Proposition 4 *Lorsque les externalités sont essentiellement locales et les bénéfices individuels connaissance commune et sous l'hypothèse de croissance de $r_j(c_j^j)$ en c_j^j, le mécanisme optimal $\{x^*, p^*\}$ est tel que, $\forall c \in \Theta$, $\forall j \in N$:*

1. $x_j^*(c) = 0, \forall j \in N$ *si* $\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i - r_j(c_j^j) \geqslant C, \forall j \in N$

2. $x_j^*(c) = 1,$ *si* $\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i - r_j(c_j^j) \geqslant C$ *et si* $c_j^j = \min\limits_{l \in N}\{c_l^l\}$

3. $p_j^*(c) = \gamma_j \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^*(c) - c_j^j . x_j^*(c) - \int\limits_{c_j^j}^{\tilde{c}_j^j} x_j(s_j; c_{-j}) ds_j$

Le paiement que verse à l'entreprise l'agent choisi comme hôte pour le site est inférieur à sa capacité financière maximale locale à payer ($\gamma_j - r_j(c_j) < \gamma_j - c_j^j$) : l'entreprise donne une part du profit à l'agent supportant les externalités locales liées à son implantation pour financer la révélation honnête des dommages locaux. Ce phénomène va supprimer certaines possibilités de gains mutuels : l'entreprise peut décider de ne pas s'implanter alors que cela aurait profité à tous. Nous observons à nouveau la présence d'inefficacités allocatives. La règle de sélection suggère la construction d'une valeur limite d'admissibilité des offres des agents. Sous l'hypothèse de monotonie de $r_j(c_j^j)$, cette valeur, notée c_j^*, est telle que : $r_j(c_j^*) = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i - C$, soit $c_j^* = r_j^{-1}(\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i - C)$. Nous obtenons donc $x_j^*(c) = 1$ si $c_j^j \leqslant c_j^*$ et $c_j^j = \min\limits_{l \in N}\{c_l^l\}$ et $x_i^*(c) = 0$ sinon. Étant donnée la règle de sélection, nous pouvons faire apparaître trois possibilités pour localisation $j, j \in N$:

$$\begin{cases} x_j^*(c) = 1, & \text{si } c_j^j \leqslant c_j^* \text{ et } c_j^j = \min\limits_{l \in N}\{c_l^l\} \\ x_j^*(c) = 0, & \text{si il existe } l, l \neq j \text{ tel que } x_l(c) = 1 \\ x_j^*(c) = 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{47}$$

Posons la valeur suivante, $\forall j \in N$:

$$\tilde{c}_j^j(c_{-j}) = \{\sup c_j^j / c_j^j \leqslant c_j^* \text{ et } c_j^j = \min\limits_{l \in N}\{c_l^l\}\} \tag{48}$$

Cette valeur s'interprète comme la plus forte annonce de dommage environnemental local que peut faire l'agent j sans changer la décision de l'entreprise : $\tilde{c}_j^j$ représente donc la deuxième plus basse annonce de dommage environnemental.

Nous avons donc, $\forall s_j \in [c_j^j; \tilde{c}_j^j]$:

$$\begin{cases} x_j^*(s_j; c_{-j}) = 1 & \text{si } s_j \leqslant \tilde{c}_j^j \\ x_j^*(s_j; c_{-j}) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{49}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} p_j^*(c) &= \gamma_j \cdot \sum_{l=1}^{n} x_l(c) - c_j^j \cdot x_j(c) - \int_{c_j^j}^{\tilde{c}_j^j} x_j(s_j; c_{-j}) ds_j \\ &= \begin{cases} \gamma_j - \tilde{c}_j^j(c_{-j}) & \text{si } x_j(c) = 1 \\ \gamma_j & \text{si } x_l(c) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{50}$$

Si l'entreprise s'implante en j, l'agent j versera un paiement à l'entreprise égal à son bénéfice individuel moins la deuxième plus basse annonce de coût environnemental local. Nous constatons également que se paiement peut être négatif : l'entreprise versera un paiement à l'agent j lorsque $\gamma_j < \tilde{c}_j^j(c_{-j})$. Si l'entreprise s'implante en $l, l \neq j$, l'agent j versera un paiement égal à son bénéfice individuel. Si l'entreprise ne se localise pas, alors les agents ne versent rien. Nous retrouvons les propriétés de l'enchère de Vickrey (1961)[4].

Proposition 5 *Sous l'hypothèse de régularité ($r_j(c_j^j)$ non-décroissant en c_j^j), lorsque la pollution est locale, le mécanisme optimal $\{x^*, p^*\}$ peut être mis en oeuvre par une enchère sous pli cacheté à la deuxième plus basse offre dans laquelle :*

1. Chaque agent i transmet à l'entreprise une offre $b_i = c_i^i$.

2. L'entreprise choisira de se localiser en j si l'offre de l'agent j est la plus basse et si cette offre est en dessous de la valeur de réserve c_j^* associée à l'agent j.

3. Si l'entreprise s'implante en j, alors l'agent j effectuera un paiement à l'entreprise égal à son bénéfice individuel moins la deuxième plus basse offre et les autres agents i, $i \neq j$, verseront leur bénéfice individuel à l'entreprise.

4. Si l'entreprise ne s'implante pas, aucun paiement ne prend place.

5 Considérations finales

Deux grandes conclusions ressortent de notre analyse. Premièrement, les mécanismes optimaux indiquent que l'entreprise est forcée à internaliser les dommages environnementaux subis par les agents. Ce phénomène est dû au pouvoir de veto attribué à chaque agent : l'entreprise doit tenir compte de toutes les revendications individuelles sous peine de voir son installation échouée. Par conséquent, l'existence d'un droit de veto sur la localisation de l'entreprise nous ramène à un problème d'achat de droits à polluer. Si l'entreprise désire s'implanter, elle doit verser à chaque agent un transfert, fonction du dommage subi, au moins égal à son coût environnemental. Ce transfert permet alors « l'achat » des protestations locales et ressemble donc à l'acquisition de droits à polluer par l'entreprise. Deuxièmement, en information incomplète, le caractère incitatif du mécanisme optimal oblige l'entreprise à abandonner une part de son profit en faisant payer aux agents un prix inférieur à leur capacité financière : la révélation de la vérité est donc très coûteuse et va engendrer l'existence d'inefficacités allocatives (l'entreprise ne s'installera pas alors que la somme des capacités financières à payer

4 Dans notre cadre où les distributions des paramètres sont asymétriques, l'enchère de Vickrey risque d'être insuffisante pour réaliser l'optimum. De nouvelles inefficacités allocatives apparaissent alors dans le processus d'enchères.

des agents le permettrait). Ce résultat est une conséquence directe des possibilités de manipulations stratégiques de l'information offertes aux agents en information incomplète (chacun a tendance à surévaluer son dommage pour obtenir une plus forte compensation).

Des extensions aux modèles proposées pourraient s'intéresser aux conséquences sur le mécanisme de localisation/tarification de la règle de vote au sein du groupe d'agents en passant, par exemple, d'une règle de vote à l'unanimité à une règle de vote à la majorité. Ce changement conduirait aux questions suivantes : Comment l'entreprise maximisera son profit ? Quelle contrainte de rationalité individuelle décidera-t-elle de saturer ? Décidera-t-elle d'exclure certains agents des bénéfices du site collectif ? En outre, il serait également envisageable d'inclure des problèmes de qualité environnementale de l'installation collective : l'entreprise pourrait alors choisir une installation plus ou moins polluante (plus ou moins coûteuse) et proposer en quelques sortes des menus de localisation/qualité environnementale aux agents de la communauté.

Annexe : éléments de démonstration de la proposition 1

Un mécanisme $\{x,p\}$ est incitatif si et seulement si :

$$U_i(v_i) \geqslant U_i(v_i;\hat{v}_i), \forall v_i, \hat{v}_i \in V_i^2 \tag{51}$$

Face au mécanisme $\{x,p\}$, chaque agent va maximiser son espérance d'utilité par rapport à son annonce. Pour que le mécanisme soit incitatif, il faut et il suffit que le résultat de cet optimisation conduise l'agent à révéler honnêtement ses caractéristiques. En conséquence, $U_i(v_i)$ va apparaître comme la fonction de valeur maximale associée à ce problème d'optimisation, soit,$\forall i \in N, \forall v_i \in V_i$:

$$U_i(v_i) = \max_{\hat{v}_i \in V_i}\{U_i(v_i;\hat{v}_i)\} \tag{52}$$

avec,

$$U_i(v_i;\hat{v}_i) = X_i(\hat{v}_i).v_i - P_i(\hat{v}_i), \forall i \in N, \forall v_i, \hat{v}_i \in V_i^2 \tag{53}$$

Ceci nous permet de conclure que $U_i(v_i)$ est convexe sur le compact V_i. La proposition suivante constitue le premier pas de l'analyse.

Lemme 1 *Le mécanisme $\{x,p\}$ est incitatif si et seulement si, $\forall i \in N$,*

1. *$U_i(v_i)$ est convexe et continue sur l'ensemble compact V_i.*
2. *$\forall v_i \in V_i, X_i(v_i) \in \partial U_i(v_i)$*

Preuve : Rochet (1985) et Armstrong (1996) □

Nous poursuivons l'analyse en montrant que $U_i(v_i)$ est dérivable en $v_i, v_i \in intV_i$. D'après le lemme 1, nous savons déjà que $U_i(v_i)$ est convexe, continue sur l'ensemble compact V_i et que, d'après le caractère incitatif du mécanisme $\{x, p\}$, elle satisfait :

$$X_i(v_i).(v_i - \hat{v}_i) \leqslant U_i(\hat{v}_i; \hat{v}_i) - U_i(v_i; v_i) \leqslant X_i(\hat{v}_i).(v_i - \hat{v}_i) \tag{54}$$

Prenons deux vecteurs $v_i, \tilde{v}_i \in intV_i^2$ (ces vecteurs existent puisque l'intérieur de V_i est supposé non-vide) tels que $v_i^k - \tilde{v}_i^k = \varepsilon, \varepsilon \neq 0$ (pour un k arbitraire) et $v_i^j - \tilde{v}_i^j = 0, \forall j \neq k$. La condition (54) va alors s'écrire :

$$X_i^k(v_i) \cdot \underbrace{(\tilde{v}_i^k - v_i^k)}_{=\varepsilon} \leqslant U_i(\tilde{v}_i) - U_i(v_i) \leqslant X_i^k(\tilde{v}_i) \cdot \underbrace{(\tilde{v}_i^k - v_i^k)} = \varepsilon \tag{55}$$

En divisant (55) par ε, et en prenant la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ (i.e. $v_i \to \tilde{v}_i$), il vient :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U_i(\tilde{v}_i) - U_i(v_i)}{\varepsilon} = \lim_{\tilde{v}_i \to v_i} \frac{U_i(\tilde{v}_i) - U_i(v_i)}{\tilde{v}_i^k - v_i^k} = X_i^k(v_i) = \frac{\partial U_i(v_i)}{\partial v_i^k} \tag{56}$$

Comme $X_i^k(v_i)$ est un singleton, sa valeur est nécessairement unique. La dérivée partielle de $U_i(v_i)$ par rapport à v_i^k (k arbitraire) en $v_i \in intV_i$ existe et est unique. Ceci implique que, $\forall v_i \in intV_i$, le vecteur $X_i(v_i)$ est le gradient (Rockafellar (1970), Théorème 25.1, p 242) de $U_i(v_i)$ en $v_i \in intV_i$. Dès lors, $U_i(v_i)$ est différentiable en $v_i \in intV_i$ et $\partial U_i(v_i) = X_i(v_i) = \{\nabla U_i(v_i)\}$ (avec $\{\nabla U_i(v_i)\}$ l'ensemble des gradients de $U_i(v_i)$).

Lemme 2 *Si le mécanisme $\{x, p\}$ satisfait les conditions du lemme 1, alors $U_i(v_i)$ est différentiable en $v_i \in intV_i$ et $\partial U_i(v_i) = X_i(v_i) = \{\nabla U_i(v_i)\}, v_i \in intV_i$.*

Le fait que $X_i(v_i) = \{\nabla U_i(v_i)\}, v_i \in intV_i$, nous ramène au familier théorème de l'enveloppe appliqué traditionnellement à l'analyse monodimensionnelle de l'enchère optimale. En effet, si $U_i(.)$ est différentiable en v_i (en fait, $\forall v_i \in intV_i$) :

$$\begin{aligned} \frac{dU_i(v_i)}{dv_i^j} &= \underbrace{\frac{\partial U_i(v_i; \hat{v}_i)}{\partial \hat{v}_i^j}}_{=0} \cdot \left. \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial v_i^j} \right|_{\hat{v}_i = v_i} + \left. \frac{\partial U_i(v_i; \hat{v}_i)}{\partial v_i^j} \right|_{\hat{v}_i = v_i} \\ &= \left. \frac{\partial U_i(v_i; \hat{v}_i)}{\partial v_i^j} \right|_{\hat{v}_i = v_i} = X_i^j(v_i) \ (\forall v_i \in intV_i) \end{aligned}$$

Comme $X_i^j(v_i)$ est une espérance de probabilité, elle est par définition positive. Ceci implique que $\forall v_i \in intV_i$, tous les éléments du vecteur gradient $X_i(v_i)$ sont non-négatifs. Nous en déduisons donc que $U_i(v_i)$ est non-décroissante en chacun de ses arguments ($\forall i \in N$, non-décroissante en $v_i^j, j \neq i, j \in N$) et ce $\forall v_i \in intV_i$. La continuité de $U_i(v_i)$ sur le compact

V_i nous garantit la non-décroissance de $U_i(v_i)$ en chacun de ses arguments sur le compact V_i (i.e. sur tous les vecteurs v_i même sur ceux appartenant à la frontière de V_i).

Ce premier résultat classique de l'analyse multidimensionnelle nous permet d'établir le sens de variation de l'espérance d'utilité de chaque agent.

Lemme 3 *L'espérance d'utilité $U_i(v_i)$ est non-décroissante en chacun de ses arguments.*

Le lemme suivant détermine les conditions équivalentes aux contraintes incitatives qui vont nous permettre de simplifier l'analyse du problème.

Lemme 4 *Le mécanisme $\{x,p\}$ est incitatif si et seulement si :*

1. $U_i(v_i)-U_i(v_i')=\int_0^1 X_i(\alpha v_i+(1-\alpha)v_i')\cdot(v_i-v_i')d\alpha, \forall v_i\in V_i, \forall i\in N$ *pour un $v_i'\in V_i$ arbitraire*

2. X_i est cycliquement monotone

Preuve : Lescop (2000) □

Nous constatons l'apparition d'une valeur de référence $v_i'\in V_i$ que l'on peut choisir de manière arbitraire. Nous constatons que l'espérance d'utilité de l'agent i, lorsqu'il est de type $v_i\in V_i$, (et ce $\forall v_i\in V_i$) est entièrement définie par l'espérance d'utilité de la valeur de référence v_i' et par la règle de sélection : la prochaine étape de notre raisonnement consistera à fixer la valeur arbitraire v_i'.

Il convient, à présent, d'intégrer les contraintes de rationalité individuelle à notre analyse. L'analyse des contraintes de rationalité individuelle consiste à déterminer la valeur du type critique (type tel que, si la contrainte de rationalité individuelle est satisfaite pour ce type, alors elle l'est automatiquement pour tous).

D'après le lemme 4, en posant $v_i'=\underline{v}_i$, l'espérance d'utilité de l'agent i s'écrit, lorsque le mécanisme $\{x,p\}$ est incitatif, $\forall v_i\in V_i, \forall i\in N$:

$$U_i(v_i)-U_i(\underline{v}_i)=\int_0^1 X_i(\alpha v_i+(1-\alpha)\underline{v}_i)\cdot(v_i-\underline{v}_i)d\alpha \tag{57}$$

Or, la cyclicité monotone de X_i implique (Rockafellar (1970)), $\forall v_i,\hat{v}_i\in V_i^2$:

$$\int_0^1 X_i(\alpha v_i+(1-\alpha)\hat{v}_i)\cdot(v_i-\hat{v}_i)d\alpha \geqslant X_i(\hat{v}_i)\cdot(v_i-\hat{v}_i) \tag{58}$$

En appliquant cette inégalité au cas où $\hat{v}_i=\underline{v}_i$, il vient, $\forall v_i\in V_i$:

$$\int_0^1 X_i(\alpha v_i+(1-\alpha)\underline{v}_i)\cdot(v_i-\underline{v}_i)d\alpha \geqslant X_i(\underline{v}_i).(v_i-\underline{v}_i) \tag{59}$$

D'après (57), nous savons que $\int_0^1 X_i(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i) \cdot (v_i - \underline{v}_i) d\alpha = U_i(v_i) - U_i(\underline{v}_i)$. Nous obtenons donc, $\forall i \in N, \forall v_i \in V_i$:

$$U_i(v_i) - U_i(\underline{v}_i) \geqslant X_i(\underline{v}_i).(v_i - \underline{v}_i) \tag{60}$$

Comme $X_i(\underline{v}_i)$ est un vecteur d'espérance de probabilités (positives par définition) et $(v_i - \underline{v}_i)$ donne un vecteur à éléments positifs (puisque par définition chaque élément de v_i est supérieur à l'élément correspondant de $\underline{v}_i$), le membre de droite de cette inégalité est positif. Nous en déduisons donc que $U_i(v_i) - U_i(\underline{v}_i) \geqslant 0, \forall i \in N, \forall v_i \in V_i$, soit $U_i(\underline{v}_i) = \min_{v_i \in V_i} \{U_i(v_i)\}$. En conséquence, si le mécanisme garantit que $U_i(\underline{v}_i) \geqslant 0, \forall i \in N$, alors $U_i(v_i) \geqslant 0, \forall i \in N$. Toutes les contraintes de rationalité individuelle deviennent redondantes et seules celles portant sur les types $\underline{v}_i$ ($\forall i \in N$) demeurent pertinentes. Le type critique est donc $\underline{v}_i, \forall i \in N$.

Lemme 5 *Le mécanisme $\{x,p\}$ est incitatif et individuellement rationnel si et seulement si :*

1. $U_i(v_i) = U_i(\underline{v}_i) + \int_0^1 X_i(\alpha v_i + (1-\alpha)\underline{v}_i) \cdot (v_i - \underline{v}_i) d\alpha, \forall v_i \in V_i, \forall i \in N$
2. $U_i(\underline{v}_i) \geqslant 0, \forall i \in N$
3. *X_i est cycliquement monotone*

La proposition 1 découle du lemme précédent.

Bibliographie

Amey R.G., S.L. Albrecht et S. Amir (1997), "Low-Level Radiactive Waste : Policy Failure, Regional Failure", *Regional sciences*, 31, pp.620-630.

Armstrong M. (1996), "Multiproduct Nonlinear Pricing", *Econometrica*, 64, pp.51-75.

Bacot H., T. Bowen et M. Fitzgerald (1994), "Managing the Solid Waste Crisis : Exploring the Link between Citizen Attitudes, Policy Incentives, and Siting Landfills", *Policy Studies Journal*, 22(2), pp.229-244.

Bernheim B.D. et M. Whinston (1986), "Menu Auctions, Resource Allocation, and Economic Influence", *Quaterly Journal of Economics*, 101, pp.1-33.

Buchanan J.M. (1965), "An Economic Theory of Clubs", *Economica*, vol.32, 1.

Clarke F. (1971), "Multipart Pricing of Public Goods", *Public Choice*, 11, pp.17-33.

Groves T. (1973), "Incentives in Team", *Econometrica*, 41, pp.617-631.

Jehiel P., Moldovanu B. et E. Stacchetti (1997), *Multidimensional Mechanism Design for Auctions with Externalities*, mimeo, Universität of Mannheim.

Jehiel P., Moldovanu B. et E. Stacchetti (1999), "Multidimensional Mechanism Design for Auctions with Externalities", *Journal of Economic Theory*, 85, pp.258-293.

Kleindorfer P.R. et H.C. Kunreuther, (1986), "A Sealed-Bid Auction Mechanism for Siting Noxious Facilities", *American Economic Review*, mimeo, pp.295-299.

Kleindorfer P.R. et M.R. Sertel (1994), "Auctioning the Provision of an Indivisible Public Good", *Journal of Economic Theory*, vol.64, pp.20-34.

Krishna V. et M. Perry (1997), *Efficient Mechanism Design*, mimeo, Pennsylvania State University.

Kunreuther H., P. Kleindorfer, P. Knez et R. Yaksick (1987), "A Compensation Mechanism for Siting Noxious Facilities : Theory and Experimental Design", *Journal of Environmental Economics and Management*, 14, pp.371-383.

Kunreuther H. et D. Easterling (1996), "The Role of Compensation in Siting Hazardous Facilities", *Journal of Policy Analysis and Management*, vol.15, 4, pp.601-622.

Kunreuther H., J. Linnerooth et K. Fitzgerald (1996), "Siting Hazardous Facilities : Lessons from Europe and America", in P. Kleindorfer, H. Kunreuther et D. Hong (eds.), *Environment and the Economy : Asian Perspectives*, Cheltenham, United Kingdom, Edward Elgar Publishing.

Laussel D. et M. Le Breton (1998), "Efficient Private Production of Public Goods under Common Agency", *Games and Economic Behavior*, 22, pp.194-218.

Lescop D. (2000), *Enchères et Externalités : Applications à la Localisation des Biens Collectifs*, Thèse pour le Doctorat en Sciences Économiques, Université de Franche-Comté.

Martimort D. (1992), « Multiprincipaux avec Anti-Sélection », *Annales d'Économie et de Statistique*, 28, pp.1-37.

Myerson R.B. (1981), "Optimal Auction Design", *Mathematics of Operations Research*, vol. 6, pp.58-73.

Pesendorfer M. (1998), "Pollution Claim Settlements under Correlated Information", *Journal of Economic Theory*, 79, pp.72-105.

Rob R. (1989), "Pollution Claim Settlements under Private Information", *Journal of Economic Theory*, 47, pp.307-333.

Rochet J.C. (1985), "The Taxation Principle and Multitime Hamilton-Jacobi Equations", *Journal of Mathematical Economics*, 14, pp.93-128.

Rockafellar T., (1970), *Convex Analysis*, Princeton, New Jersey : Princeton University Press.

Vickrey W. (1961), "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, 16, pp.8-37.