Les effets d'un risque démographique sur l'épargne

Bertrand Crettez
Université de Franche-Comté
et Université Paris I Panthéon-Sorbonne
Johanna Etner(*)
Université Paris I Panthéon-Sorbonne

1 Introduction

L'un des arguments avancés pour justifier l'introduction des fonds de pensions est que ceux-ci encourageront la formation d'une épargne longue dont l'absence fait cruellement défaut aujourd'hui. Les fonds de pensions collecteraient une épargne qui serait prêtée aux entreprises — en particulier les petites et moyennes — dont les besoins de financement ne sont satisfaits ni par les marchés financiers ni par les Banques et autres institutions financières. Cette épargne pourrait également être utilisée pour financer les entreprises ayant accès aux marchés financiers ce qui permettrait de conserver un contrôle national des entreprises et par la même de faire disparaître une source importante de fluctuation des taux de change.

Ces arguments ont été critiqués à juste titre (Biais et Sire [1994], Saint-Paul [1994]). C'est en effet la fonction des marchés financiers que de collecter une épargne longue tout en garantissant une certaine liquidité, et on ne voit pas pourquoi il faudrait sacrifier celle-ci à celle-là. D'autre part, les difficultés de financement des entreprises sont souvent liées à des problèmes d'asymétries d'informations dont la solution ne peut être trouvée à coup sûr par la création de fonds de pensions. Enfin, l'argument de l'indépendance nationale est douteux et les problème de variabilité des taux de change disparaîtront si la monnaie unique est introduite.

L'introduction des fonds de pensions est surtout souhaitée parce que ceux-ci pourraient en suscitant — avec l'aide éventuelle d'avantages

(*) Nous remercions deux rapporteurs anonymes pour les commentaires avisés sur une version précédente de cette article.

fiscaux — un accroissement de l'effort d'épargne remédier aux difficultés prévisibles de financement des régimes de retraites par répartition. Ces difficultés sont la conséquence du vieillissement de la population et de la baisse de la natalité.

Cependant, les prévisions démographiques sont entâchées d'incertitude notamment lorsqu'elles portent sur le long terme (Hageman et Nicoletti [1989]). Par conséquent, cette incertitude devrait affecter les comportements des agents par le biais de leurs anticipations.

Il est certes clair que pour la partie la plus agée des actifs en 1997 l'aléa démographique est faible : les agents qui financeront leurs pensions sont déjà nés et même parfois en activité. Un aléa subsiste néanmoins : les taux de mortalité et les comportements migratoires ne sont pas connus avec certitude et il en est de même pour le taux de chômage qu'il faut également prendre en charge.

Comme le souligne Kessler [1990], « il sera difficile de savoir si, par exemple, la fécondité sera cyclique dans les 200 années qui viennent, voire même dans les 50 ans qui viennent, plutôt que tendancielle telle que celle que l'on la représente ».

Envisageons par contre un agent né en 1960. Cet agent ne sait pas avec certitude qui financera ses retraites au cours des années 2040-2050. Les cotisants ne sont évidemment pas tous nés et il est difficile de prévoir leur nombre. Pour pallier à cette incertitude, les démographes établissent des projections démographiques à partir d'hypothèses différentes en matière de fécondité.

L'objet de cet article est d'étudier comment l'épargne est susceptible de changer, à régime de retraites inchangé, en tenant compte des aléas de l'évolution démographique. La question que nous nous posons est donc celle de savoir si, toutes choses égales par ailleurs, un accroissement du risque démographique peut être à l'origine d'un accroissement d'une épargne qui obéirait ainsi à un motif de précaution. De la sorte, l'introduction de fonds de pensions — et particulièrement les avantages fiscaux qui les accompagnent — deviendrait moins nécessaire puisque les agents ajusteraient leurs comportements d'épargne en fonction des modifications du contexte démographique. Autrement dit, même avec un régime de retraites par répartition, les agents peuvent faire un effort d'épargne supplémentaire s'ils considèrent que l'évolution démographique est plus risquée. Si, en revanche, un accroissement du risque démographique est à l'origine d'une diminution de l'épargne, l'introduction de fonds de pensions et d'encouragements fiscaux à l'épargne aurait une certaine pertinence.

Le cadre d'analyse utilisé ici est un modèle à générations imbriquées avec taux de croissance de la populations aléatoire[1]. Dans la section suivante, nous présentons les éléments du modèle. Dans la troisième section, nous présentons un exemple qui illustre l'idée selon laquelle le comportement de précaution des agents —dont la caractérisation est un acquis récent de la théorie micro-économique— ne suffit plus à lui seul à déterminer l'influence d'un accroissement du risque sur l'épargne. Nous reprenons cette idée dans un cadre plus général dans la section quatre. La section cinq conclut l'article.

2 Le modèle

Nous consacrons cette section à la présentation des éléments fondamentaux du modèle.

2.1 Les agents

2.1.1 Les consommateurs

Nous considérons un modèle à générations imbriquées où tous les individus d'une même génération sont identiques et vivent deux périodes. À la date t, la population croît à un taux n_t :

$$N_t = (1 + n_t) N_{t-1} . \tag{1}$$

Nous supposons que ce taux est une variable aléatoire et que le risque est de nature additive. Formellement, nous aurons à une date t quelconque[2] :

$$\widetilde{n}_{t+1} = n + a\widetilde{\epsilon} \tag{2}$$

où $n \in \mathbb{R}_+^*$, est le taux de croissance moyen de la population, $a \in \mathbb{R}_+^*$, un paramètre et $\widetilde{\epsilon}$ est une variable aléatoire indépendante du temps centrée réduite.

On note G la fonction de répartition associée à la variable aléatoire $\widetilde{\epsilon}$ dont le support est un intervalle $[\underline{\epsilon}, \overline{\epsilon}]$ tel que $1+n+\underline{\epsilon}a > 0$. Nous avons $E\widetilde{n}_{t+1} = n$ et $\mathrm{var}(\widetilde{n}_{t+1}) = a^2$.

---

(1) Un tel cadre a été utilisé sous des formes différentes par plusieurs auteurs. Blanchet [1990] compare les régimes par répartition et capitalisation. Smith [1982] et Brandts et Bartolome [1992] s'intéressent aux partages des risques entre générations. Augier, Chauveau et Loupias [1995] présentent un modèle avec taux de croissance de la population et progrès techniques aléatoires afin d'étudier la configuration optimale des régimes de retraites.

(2) Un tilde indique une variable aléatoire.

L'avantage de la modélisation précédente est double. Tout d'abord, il est possible d'étudier l'impact d'une variation du taux de croissance de la population en modifiant n afin de préciser les effets d'un changement en profondeur des comportements des agents en matière de fertilité. Ensuite, nous pouvons analyser les conséquences d'un accroissement de l'incertitude en ce qui concerne le taux de natalité, en faisant varier le paramètre a.

À la date t, les agents jeunes, nés en t, offrent inélastiquement une unité de travail. En échange, ils reçoivent un salaire w_t. Ce salaire a trois utilisations possibles : la consommation c_t, l'épargne s_t et la cotisation (proportion x_t $(0 \leqslant x_t \leqslant 1)$ du salaire) versée à la caisse de retraite :

$$c_t + s_t = w_t\,(1 - x_t)\,. \tag{3}$$

Lorsqu'ils sont âgés, les agents reçoivent une pension $\widetilde{b}_{t+1}$ et le produit de leur épargne $\widetilde{R}_{t+1} s_t$ où $\widetilde{R}_{t+1} = 1 + \widetilde{r}_{t+1}$. Les agents consomment toute leur richesse :

$$\widetilde{d}_{t+1} = \widetilde{R}_{t+1} s_t + \widetilde{b}_{t+1}\,. \tag{4}$$

Comme le taux de croissance de la population est une variable aléatoire qui affecte le ratio capital par tête, il en résulte que la pension et le produit de l'épargne sont également des variables aléatoires. La consommation de seconde période de vie de l'agent est d'après ce qui précède une variable aléatoire que nous noterons $\widetilde{d}_{t+1}$ définie sur $M(R^+)$, ensemble des mesures de probabilités sur R^+ (ses réalisations seront quant à elles notées d_{t+1}).

Les préférences des agents sont par hypothèse représentées par une fonction d'utilité von Neumann - Morgenstern : $U : R^+ \times M(R^+) \to R$, additivement séparable dans le temps :

$$U(c_t, \widetilde{d}_{t+1}) = u(c_t) + E\left[v\left(\widetilde{d}_{t+1}\right)\right] \tag{5}$$

Avec E l'espérance mathématique prise par rapport à G.

Les deux fonctions d'utilité (instantanée) $u(\cdot)$ et $v(\cdot)$ définies sur R^+ et à valeurs dans R vérifient les hypothèses suivantes.

Hypothèse H1 (a) $u(.)$ *et* $v(.)$ *sont strictement croissantes, concaves et de classe* C^3 *par rapport à leurs deux arguments.*

Hypothèse H1 (b) $\lim_{c\to 0} u(c) = 0\,;\ \lim_{c\to 0} u'(c) = +\infty\,;\ \lim_{d\to 0} v(c) = 0\,;\ \lim_{d\to 0} v'(c) = +\infty.$

L'objectif du consommateur est de maximiser son utilité intertemporelle espérée :

$$\max_{0 \leqslant s_t \leqslant w_t(1-x_t)} u(w_t(1-x_t)-s_t) + \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} v(s_t\widetilde{R}_{t+1}+\widetilde{b}_{t+1})dG(\widetilde{\epsilon}) \,. \tag{6}$$

Les agents anticipent le taux d'intérêt et les pensions futures comme des fonctions du taux de croissance de la population, aléatoire. Sous l'hypothèse H1, la solution du problème du consommateur est intérieure et vérifie la condition du premier ordre :

$$-u'(w_t(1-x_t)-s_t) + \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} \widetilde{R}_{t+1}v'(\widetilde{R}_{t+1}s_t+\widetilde{b}_{t+1})dG(\widetilde{\epsilon}) = 0 \,. \tag{7}$$

Interprétation. La perte d'utilité totale engendrée par la diminution d'une unité de consommation en première période de vie est compensée par l'accroissement du gain espéré d'utilité de seconde période procuré par la rémunération de l'épargne supplémentaire.

2.1.2 La caisse de retraite

L'économie comporte une caisse de retraite par répartition. À la date t celle-ci prélève une cotisation x_t sur le salaire de chaque jeune et verse une pension b_t à chaque vieux. La valeur de cette pension est déterminée par l'équilibre comptable de la caisse :

$$N_t x_t w_t = N_{t-1} b_t \,. \tag{8}$$

Suivant Smith [1982] deux situations seront distinguées.

(a) D'une part, le cas où le taux de cotisations est fixe, $x_t = x$:

$$b_t = (1+n_t)\,x w_t \,. \tag{9}$$

Cette hypothèse signifie que les pensions s'ajustent au montant des cotisations. Le problème du financement futur des retraites sera résolu pour partie par l'ajustement des prestations aux cotisations et c'est la raison pour laquelle l'hypothèse de l'ajustement semble pertinente.

(b) Nous étudions d'autre part le cas polaire, celui où la pension est fixe, $b_t = b$, et où ce sont les cotisations qui s'ajustent :

$$b = (1+n_t)\,x_t w_t \,. \tag{10}$$

2.1.3 La firme

Nous supposons qu'il existe à chaque période une unique firme dans l'économie qui se comporte de manière concurrentielle pour produire un bien homogène. Cette firme est dotée d'une fonction de production $F : R_+^2 \rightarrow R_+$ qui utilise deux facteurs : le capital K, qui se déprécie en une période, et le travail L. Cette fonction est indépendante du temps et vérifie les hypothèses suivantes :

Hypothèse H2 (a) $F(\cdot,\cdot)$ *est strictement croissante, quasi-concave par rapport à ses deux arguments, de classe* C^3 *et homogène de degré un.*

Hypothèse H2 (b) *La fonction* $f : R_+ \to R_+$ *définie par* $f(k) = F(k,1)$ *avec* $k = K/L$*, vérifie les conditions d'Inada :*

$$f(0) = 0, \quad \lim_{k\to 0} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k\to +\infty} f'(k) = 0.$$

Etant donné un salaire w_t et un taux d'intérêt r_t, la firme choisit ses demandes de facteur de manière à maximiser son profit. Sous les hypothèses H2, les conditions nécessaires d'optimalité sont :

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K_t, L_t) = w_t \tag{11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K_t, L_t) = 1 + r_t \tag{12}$$

où K_t, L_t sont les demandes de facteurs choisies par la firme à la date t.

3 Exemple

Avant d'étudier l'existence de l'équilibre et ses propriétés dans le cas général, nous développons un exemple.

3.1 Comportements des agents et équilibre

Nous supposons que la fonction d'utilité des agents est une fonction additivement séparable de type CRRA :

$$U\left(c_t, \widetilde{d}_{t+1}\right) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta E\left[\frac{\widetilde{d}_{t+1}^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right]. \tag{13}$$

où β, est le taux d'actualisation subjectif et σ (positif et différent de l'unité) est le coefficient d'aversion relative pour le risque.

Nous pouvons noter que l'élasticité de substitution intertemporelle est l'inverse du coefficient d'aversion relative pour le risque, et que le degré de prudence relative, défini par analogie au degré d'aversion relative pour le risque (Kimball [1990]), s'écrit $(1+\sigma)$ et est positif (ce qui signifie que les agents sont prudents au sens de Kimball).

Cette fonction d'utilité vérifie bien les hypothèses H1. Aussi, la solution du programme d'un agent né en t, est donnée par la condition du premier ordre :

$$(w_t (1 - x_t) - s_t)^{-\sigma} = \beta \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} R_{t+1} \left[s_t R_{t+1} + \widetilde{b}_{t+1}\right]^{-\sigma} dG(\widetilde{\epsilon}). \qquad (14)$$

La fonction de production est supposée de type Cobb-Douglas :

$$F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha} \qquad (15)$$

où α est l'élasticité de substitution entre les facteurs de production, capital et travail.

Les conditions du premier ordre de la firme sont alors :

$$\begin{aligned} 1 + r_t &= \alpha k_t^{\alpha-1} & (16)\\ w_t &= (1-\alpha) k_t^{\alpha}. & (17) \end{aligned}$$

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'existence d'un équilibre avec anticipations rationnelles à une date donnée. En effet, il n'y a pas à proprement parler d'équilibre stationnaire, l'aléa démographique interdisant la réalisation de ce type d'équilibre qui ne vaut que pour le cas certain. Les agents formant des anticipations rationnelles, nous obtenons :

$$1 + r_t = \alpha \left(\frac{s_t}{1 + n_{t+1}}\right)^{\alpha - 1}$$

et

$$b_{t+1} = (1 + n_{t+1})\, x_{t+1}\, (1 - \alpha) \left(\frac{s_t}{1 + n_{t+1}}\right)^{\alpha}.$$

Nous distinguons alors deux cas selon que le taux de cotisation est fixé ou bien que les montants des pensions sont fixés.

Dans le cas de taux de cotisations fixes, $x_t = x$, à chaque date t, l'épargne d'équilibre vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &(w_t (1 - x) - s_t)^{-\sigma} \\ &= \alpha\beta \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} \left(\frac{s_t}{1 + n + a\widetilde{\epsilon}}\right)^{\alpha-1} \\ &\quad \times \left[\alpha s_t \left(\frac{s_t}{1 + n + a\widetilde{\epsilon}}\right)^{\alpha-1} + (1 + n + a\widetilde{\epsilon})\, x\, (1-\alpha) \left(\frac{s_t}{1 + n + a\widetilde{\epsilon}}\right)^{\alpha}\right]^{-\sigma}. \end{aligned}$$

En posant $\gamma = (\alpha - 1) - \alpha\sigma$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(w_t(1-x_t) - s_t)^{-\sigma} &= \alpha\beta s_t^{\gamma}\left[\alpha + (1-\alpha)x\right]^{-\sigma} \\ &\quad \times \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} (1+n+a\widetilde{\epsilon})^{(1-\alpha)(1-\sigma)}\, dG(\widetilde{\epsilon}).\end{aligned} \tag{18}$$

L'existence d'un équilibre est alors immédiate.

Dans le cas de pensions fixes, $b_t = b$, à chaque date t, l'épargne d'équilibre vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned}&(w_t(1-x_t) - s_t)^{-\sigma} \\ &= \alpha\beta \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} \left(\frac{s_t}{1+n+a\widetilde{\epsilon}}\right)^{\alpha-1} \\ &\quad \times \left[\alpha s_t^{\alpha}(1+n+a\widetilde{\epsilon})^{1-\alpha} + b\right]^{-\sigma} dG(\widetilde{\epsilon}).\end{aligned} \tag{19}$$

L'existence d'un équilibre se montre encore aisément.

3.2 Sensibilités au taux de croissance moyen de la population

Dans cet exemple, les effets d'une augmentation du taux de croissance de la population sur l'épargne d'équilibre sont sans ambiguïté dans le cas de pensions ajustables, mais dépendent de l'élasticité de subsitution intertemporelle dans le cas de pensions fixes. En effet, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 1 *Lorsque les fonctions d'utilité sont de type CRRA et que la fonction de production est de type Cobb-Douglas,*

- *dans le cas de pensions ajustables, une augmentation du taux de croissance de la population moyen augmente (resp. diminue) l'épargne d'équilibre si et seulement si l'élasticité de substitution intertemporelle est supérieure (resp. inférieure) à 1 ;*
- *dans le cas de pensions fixes, une augmentation du taux de croissance de la population moyen augmente l'épargne d'équilibre si l'élasticité de substitution intertemporelle est supérieure à 1.*

Preuve. Le signe de la variation du taux de croissance de la population sur l'épargne est donné par les signes des expressions suivantes.

Dans le cas de pensions ajustables [cf. équation (18)] :

$$\begin{aligned}\Gamma_n' &= \alpha(1-\alpha)(1-\sigma)\beta s_t^{\gamma} \times \left[\alpha + (1-\alpha)x\right]^{-\sigma} \\ &\quad \times \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} (1+n+a\widetilde{\epsilon})^{(1-\alpha)(1-\sigma)-1}\, dG(\widetilde{\epsilon}).\end{aligned}$$

Dans le cas de pensions fixes [cf. équation (19)] :

$$\begin{aligned}\Gamma_n' &\\ = \;& \alpha(1-\alpha)\beta s_t^{\alpha-1}\int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]}(1+n+a\widetilde{\epsilon})^{-\alpha}\left[\alpha s_t^{\alpha}(1+n+a\widetilde{\epsilon})^{1-\alpha}+b\right]^{-\sigma-1}\\ &\times\left[(1-\sigma)\alpha s_t^{\alpha}(1+n+a\widetilde{\epsilon})^{1-\alpha}+b\right]dG(\widetilde{\epsilon}). \qquad \square\end{aligned}$$

Dans le cas de pensions ajustables, l'augmentation du taux moyen de croissance de la population entraîne une augmentation du montant des pensions en espérance et du taux d'intérêt. Lorsque l'effet substitution est supérieur à l'effet revenu, l'impact de ces deux changements sur l'épargne sont opposés puisque l'augmentation des pensions incite les agents à détenir moins d'épargne et celle du taux d'intérêt les incite au contraire à l'augmenter. Au total, le second effet l'emporte et les agents augmentent leur niveau d'épargne. En revanche, lorsque l'effet revenu l'emporte sur l'effet substitution, les agents sont incités à réduire leur épargne et l'épargne d'équilibre diminue.

Lorsque les pensions sont fixes, l'augmentation du taux moyen de croissance de la population entraîne uniquement une augmentation du taux d'intérêt. Lorsque l'effet substitution est supérieur à l'effet revenu, cette augmentation incite les agents à détenir plus d'épargne.

3.3 Effets d'un accroissement de risque sur l'épargne

Une plus grande incertitude en matière d'évolution de la population peut être étudiée en changeant la distribution de $\widetilde{\epsilon}$. Pour ce faire, nous nous intéressons particulièrement au cas d'un accroissement du risque à moyenne constante. Nous supposons désormais que la variable $\widetilde{\epsilon}$ suit une loi de distribution de probabilités notée $F(\epsilon)$ telle que F soit obtenue par un étalement préservant la moyenne (MPS) de G.

3.3.1 Taux de cotisation fixes

Dans ce cas, la sensibilité de l'épargne d'équilibre à l'accroissement de risque est donnée par le signe de l'expression :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}(1+n+a\epsilon)^{(1-\alpha)(1-\sigma)} &= -a^2(1-\alpha)(1-\sigma)\left[\sigma(1-\alpha)+\alpha\right]\\ &\quad\times(1+n+a\epsilon)^{(1-\alpha)(1-\sigma)-2}. \qquad (20)\end{aligned}$$

Nous obtenons le résultat formulé dans la proposition 2.

Proposition 2 *Dans le cas de fonctions d'utilité de type CRRA, de fonction de production de type Cobb-Douglas et de taux de cotisation fixe,* *lorsque le risque de taux de croissance s'accroît, l'épargne d'équilibre augmente (diminue) si et seulement si l'élasticité de substitution intertemporelle est inférieure (supérieure) à 1.*

Lors d'un accroissement de risque, si l'élasticité de substitution intertemporelle est supérieure à 1, l'épargne d'équilibre diminuera. Nous retrouvons les résultats de Sandmo [1970], Smith [1996] et de Mauro [1995]. Cependant, nous ne pouvons pas distinguer l'effet dû au risque de revenu de celui dû au risque de taux d'intérêt. Aussi, il n'est pas possible de préciser les effets d'équilibre partiel et d'équilibre général. Cette précision sera faite dans les prochaines sections où nous étudierons ces effets dans le cas général.

3.3.2 Montants des pensions fixes

Dans ce cas, la sensibilité de l'épargne d'équilibre à l'accroissement de risque est donné par le signe de l'expression :

$$-\frac{2\sigma s_t^2}{1+n+a\epsilon}\left[2b+(1-\sigma)\frac{\alpha s_t^\alpha}{(1+n+a\epsilon)^{\alpha-1}}\right]$$
$$-\alpha\left[b+(1-\sigma)\frac{\alpha s_t^\alpha}{(1+n+a\epsilon)^{\alpha-1}}\right]^2. \tag{21}$$

Nous obtenons le résultat formulé dans la proposition 3.

Proposition 3 *Dans le cas de fonctions d'utilité de type CRRA, de fonction de production de type Cobb-Douglas et de pensions fixes, lorsque le risque de taux de croissance s'accroît, l'épargne d'équilibre diminue si l'élasticité de substitution intertemporelle est supérieure à 1.*

Lors d'un accroissement de risque, si l'élasticité de substitution intertemporelle est supérieure à 1, l'épargne d'équilibre diminuera. Nous retrouvons là encore les résultats de Sandmo [1970].

4 Cas général

L'analyse et la compréhension des résultats précédents sont maintenant précisées par une analyse du cas général. Nous commençons par établir l'existence d'un équilibre, puis, nous analysons les propriétés de l'épargne de précaution.

4.1 L'équilibre avec anticipations rationnelles

4.1.1 Conditions d'équilibre

La dynamique du stock de capital par tête de l'économie précédente s'obtient en posant :

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{22}$$

$$1 + r_t = f'(k_t) \tag{23}$$

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1 + n_{t+1}}. \tag{24}$$

Il est donc possible de déterminer complètement l'équilibre de l'économie en fonction de la seule variable s_t [(3)]. Démontrer l'existence de l'équilibre se ramène donc à démontrer l'existence d'une valeur de s_t pour laquelle toutes les équations d'équilibre sont satisfaites.

4.1.2 Existence et unicité de l'équilibre avec anticipations rationnelles

L'hypothèse d'anticipations rationnelles peut se formuler de la façon suivante :

$$R_{t+1} = F_K\left(\frac{s_t}{1 + n_{t+1}}, 1\right) \qquad \forall\, n_{t+1} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} b_{t+1} &= (1 + n_{t+1})\, x_{t+1} w_{t+1} \\ &= (1 + n_{t+1})\, x_{t+1} \times F_L\left(\frac{s_t}{1 + n_{t+1}}, 1\right). \end{aligned} \tag{26}$$

S'il existe un équilibre avec anticipations rationnelles, alors le choix optimal de l'épargne d'un agent est à chaque période solution de l'équation suivante :

$$-u'(w_t(1 - x_t) - s_t) + \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} F_K\left(\frac{s_t}{1 + n_{t+1}}, 1\right)$$
$$v'\left[s_t F_K\left(\frac{s_t}{1 + n_{t+1}}, 1\right) + (1 + n_{t+1})\, x_{t+1} F_L\left(\frac{s_t}{1 + n_{t+1}}, 1\right)\right] dG(\widetilde{\epsilon}) = 0.$$

Nous allons établir l'existence d'un équilibre avec anticipations rationnelles sous deux hypothèses alternatives.

(3) Il faut en outre spécifier des valeurs pour les prestations ou les cotisations.

Hypothèse H3 (a) $kf'(k)$ *est croissante par rapport à* k.

Hypothèse H3 (b) $\forall z > 0,\ 1 + z\dfrac{v''(z)}{v'(z)} > 0$.

La première hypothèse signifie que la rémunération de l'épargne croît avec le montant de celle-ci et a été employée par Wang [1993] dans une démonstration d'existence similaire à celle que nous présentons ici (cette hypothèse est vérifiée pour les fonctions de production de type Cobb-Douglas)

La seconde hypothèse assure la croissance de l'épargne individuelle optimale avec le taux d'intérêt (l'effet substitution étant supérieur à l'effet revenu).

Proposition 4 (Existence et unicité de l'équilibre.) *Sous l'ensemble des hypothèses H1, H2 et H3(a) ou/et H3(b) il existe un unique équilibre avec anticipations rationnelles.*

Preuve. Considérons le terme hors intégrale. Nous avons

$$\lim_{s_t \to w_t(1-x)} u'(w_t(1-x_t) - s_t) = +\infty .$$

De plus,

$$\lim_{s_t \to 0} u'(w_t(1-x_t) - s_t) = u'(w_t(1-x_t)) .$$

Rappelons que sous l'hypothèse H1(b), la fonction u est strictement concave. Aussi, le terme $u'(w_t(1-x_t) - s_t)$ est une fonction croissante de s_t. Examinons maintenant l'intégrale, nous obtenons une fonction décroissante de l'épargne sous (i) l'hypothèse H3(a) et (ii) l'hypothèse H3(b).

(i) Nous avons :

$$\begin{aligned} &\lim_{s_t \to 0} \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\tilde{\epsilon}}\right) \\ &v'\left[s_t f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\tilde{\epsilon}}\right) + (1+n_{t+1})\, x_{t+1} F_L\left(\frac{s_t}{1+n_{t+1}}, 1\right)\right] dG(\tilde{\epsilon}) \\ &= +\infty . \end{aligned}$$

En effet, nous avons :

$$0 \leqslant s_t f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}\right) \leqslant (1+n+a\epsilon)\, f\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \lim_{s_t \to 0} s_t f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}\right) \leqslant 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{s_t \to 0} s_t f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}\right) = 0 .$$

et il est immédiat que $F_{LK}(k,1)$ est positive, ce qui implique que la fonction $F_L(k,1)$ est croissante en k.

De plus,

$$\lim_{s_t \to w_t(1-x)} \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\widetilde{\epsilon}}\right) \times v'\left[s_t f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\widetilde{\epsilon}}\right) + b_{t+1}\right] dG\left(\widetilde{\epsilon}\right) < +\infty .$$

En vertu de l'hypothèse H3(a), l'intégrande et donc l'intégrale est une fonction strictement décroissante de s_t.

(ii) Dérivons le terme sous l'intégrale par rapport à s_t :

$$\frac{\partial}{\partial s_t} \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} F_K\left(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1\right) v'\left[s_t F_K\left(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1\right) + (1+n_{t+1})\, x_{t+1} F_L\left(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1\right)\right] dG\left(\widetilde{\epsilon}\right)$$

$$= \int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} \frac{F_{KK}\left(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1\right)}{1+n_{t+1}} \left[v'(z) + s_t F_K\left(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1\right) v''(z)\right] + F_K\left(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1\right)^2 v''(z) + F_K\left(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1\right) x_t F_{KL}\left(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1\right) v''(z)\, dG\left(\widetilde{\epsilon}\right) .$$

avec $z \equiv s_t F_K(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1) + (1+n_{t+1})\, x_{t+1} F_L(\frac{s_t}{1+n_{t+1}},1)$.

Comme $F_{LK}\,(k,1)$ est positive et sous l'hypothèse H3-b, l'intégrande est une fonction strictement décroissante de s_t. □

4.2 Epargne d'équilibre et accroissements de risque

Nous analysons maintenant les réponses de l'épargne d'équilibre à un accroissement de risque. Sous certaines conditions, nous montrons qu'il existe une épargne de précaution à l'échelle macro-économique et que suite à un accroissement de risque, l'épargne globale peut diminuer ou augmenter.

4.2.1 L'effet d'un changement global du risque : équilibre avec anticipations rationnelles et épargne de précaution

La littérature sur l'épargne de précaution s'est attachée à chercher des conditions sous lesquelles les agents forment une *épargne de précaution*, *i.e.* qu'ils augmentent leur épargne lorsqu'ils passent d'un environnement certain à un environnement incertain. Les conditions dégagées diffèrent selon le risque couru par les agents, risque de taux d'intérêt, de revenu ou les deux simultanément (Leland [1968], Sandmo [1970], Eeckhoudt, Sneessens et Calcoen [1992], Langlais [1995]).

Un trait commun à ces nombreuses études est de procéder le plus souvent à des analyses en équilibre partiel. Or en équilibre général, un changement de comportement d'épargne conduisant à la formation d'une épargne de précaution devrait agir en retour sur la distribution de probabilité des prix, et donc affecter la formation de l'épargne.

La prise en compte de ces effets de retour dans un cadre d'équilibre général ne garantit plus l'existence d'une épargne de précaution. L'ignorance de l'aléa démographique (par les analystes, les agents le prenant en compte) pourrait conduire à sous-estimer l'épargne pouvant exister dans une économie avec un régime par répartition. La prise en compte progressive par les agents de cette incertitude, à laquelle les media consacrent de plus en plus de place, pourrait en effet les pousser à constituer une épargne de précaution (qui se placerait notamment dans les fonds de pension). Nous cherchons alors les conditions sous lesquelles une épargne de précaution est constituée à l'équilibre.

Par conséquent, il nous faut comparer un équilibre en situation certaine à un équilibre en situation incertaine. L'équilibre sans aléa démographique s'obtient en faisant $a = 0$. Nous supposons qu'un tel équilibre, noté s_t^c, existe et est unique.

Taux de cotisation fixe. D'après l'hypothèse H1 (concavité des fonctions d'utilité), une condition nécessaire et suffisante pour que $s_t > s_t^c$ est :

$$u'\left(w_t\left(1-x\right)-s_t^c\right)+\int_{[\underline{\epsilon},\overline{\epsilon}]} f'\left(\frac{s_t^c}{1+n+a\widetilde{\epsilon}}\right)$$
$$\times\, v'\left[s_t^c f'\left(\frac{s_t^c}{1+n+a\widetilde{\epsilon}}\right)+\left(1+n+a\widetilde{\epsilon}\right)xF_L\left(\frac{s_t^c}{1+n+a\widetilde{\epsilon}},1\right)\right]dG\left(\widetilde{\epsilon}\right)$$
$$>0. \tag{27}$$

Supposons alors que l'intégrande soit une fonction convexe en ϵ, l'inégalité de Jensen nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_{[\underline{\epsilon},\bar{\epsilon}]} f'\left(\frac{s_t^c}{1+n+a\tilde{\epsilon}}\right) \\
&\qquad \times v'\left[s_t^c f'\left(\frac{s_t^c}{1+n+a\tilde{\epsilon}}\right) + (1+n+a\tilde{\epsilon})\, xF_L\left(\frac{s_t}{1+n+a\tilde{\epsilon}},1\right)\right] dG(\tilde{\epsilon}) \\
&> \quad f'\left(\frac{s_t^c}{1+n}\right) v'\left[s_t^c f'\left(\frac{s_t^c}{1+n}\right) + (1+n+a\epsilon)\, xF_L\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon},1\right)\right] \\
&= \quad 0\,.
\end{aligned}$$

La dernière égalité est satisfaite par définition par s_t^c. Par conséquent, une condition suffisante de formation de l'épargne de précaution en équilibre général est la convexité de l'intégrande ci-dessus. Cette condition suffisante fait intervenir les dérivées seconde et troisième de la fonction d'utilité. Calculons donc

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial\epsilon^2}\left\{ f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}\right)\right. \qquad (28)\\
&\qquad \left.\times v'\left[s_t f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}\right) + (1+n+a\epsilon) xF_L\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon},1\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Cette dérivée est égale à :

$$\begin{aligned}
&a^2\left[\frac{-s_t^2 f''}{(1+n+a\tilde{\epsilon})^2} + x\left(F_L - \frac{s_t F_{LK}}{1+n+a\tilde{\epsilon}}\right)\right] \\
&\quad \times \left(\frac{-s_t^2 f''}{(1+n+a\tilde{\epsilon})^2}\right)(2v'' + s_t f' v'') + a^2 x f' \qquad (29)\\
&\quad \times \left\{ \left(F_L - \frac{s_t F_{LK}}{1+n+a\tilde{\epsilon}}\right)\left[\frac{-s_t^2 f''}{(1+n+a\tilde{\epsilon})^2} + x\left(F_L - \frac{s_t F_{LK}}{1+n+a\tilde{\epsilon}}\right)\right] v''' \right.\\
&\qquad \left. + \frac{s_t^2 F_{LKK}}{(1+n+a\tilde{\epsilon})^3} v'' \right\} \\
&\quad + \frac{a^2 s_t}{(1+n+a\tilde{\epsilon})^3}\left(2f'' + \frac{s_t f'''}{1+n+a\tilde{\epsilon}}\right)(v' + s_t f' v'')\,.
\end{aligned}$$

La positivité de la dérivée n'est bien entendu pas garantie. Nous pouvons, cependant, la décomposer afin de comprendre les différents effets. D'une part, le passage d'un environnement certain à un environnement risqué peut inciter les agents à détenir plus d'épargne (« effet précaution »). D'autre part, l'augmentation du niveau d'épargne entraîne une baisse du taux d'intérêt et donc un effet retour (« effet d'équilibre général »).

Observons plus précisément ce qui se passe en équilibre partiel. Le taux d'intérêt ainsi que le montant des pensions (donc le revenu de seconde période) deviennent risqués. Nous pouvons écrire le montant des pensions comme une fonction décroissante du taux d'intérêt, $b(R)$, à partir des équation (15) et (16). Lorsque le taux d'intérêt devient risqué, les pensions le deviennent également et un individu forme une épargne de précaution lorsque :

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} Rv'\left(Rs + b\left(R\right)\right) > 0 . \tag{30}$$

Soit :

$$\begin{aligned}&\Big(s + b'\left(R\right)\Big)\Big(2v'' + Rsv'''\Big)\\ &\qquad + R\Big[\left(s + b'\left(R\right)\right)b'\left(R\right)v''' + b''\left(R\right)v''\Big] > 0 .\end{aligned} \tag{31}$$

Nous distinguons un effet dû à l'incertitude sur le taux d'intérêt (premier terme) et un effet dû à l'incertitude sur le revenu futur (deuxième terme) qui laissent indéterminé le signe de cette expression (Etner [1996]).

Une épargne individuelle d'équilibre supérieure dans un environnement incertain par rapport au cas certain, signifie que les agents veulent profiter d'un taux d'intérêt plus élevé lorsque la pension est faible (ϵ proche de $\underline{\epsilon}$) et compenser un faible taux d'intérêt lorsque la pension est forte (ϵ proche de $\overline{\epsilon}$).

Supposons que les agents constituent une épargne de précaution (la condition (31) est vérifiée) et étudions ce qui se passe à l'échelle macroéconomique.

Par identification entre les équations (29) et (31), les agents constituent une épargne de précaution si l'expression

$$\begin{aligned} H \equiv\ & \left[\frac{-s_t^2 f''}{\left(1+n+a\widetilde{\epsilon}\right)^2} + x\left(F_L - \frac{s_t F_{LK}}{1+n+a\widetilde{\epsilon}}\right)\left(\frac{-s_t^2 f''}{\left(1+n+a\widetilde{\epsilon}\right)^2}\right)\right] \\ & \times\left(2v'' + s_t f' v'''\right) + xf'\left\{\left[F_L - \frac{s_t F_{LK}}{1+n+a\widetilde{\epsilon}}\right]\right. \\ & \left.\times\left[\frac{-s_t^2 f''}{\left(1+n+a\widetilde{\epsilon}\right)^2} + x\left(F_L - \frac{s_t F_{LK}}{1+n+a\widetilde{\epsilon}}\right)\right] v''' + \frac{s_t^2 F_{LKK}}{\left(1+n+a\widetilde{\epsilon}\right)^3} v''\right\} \end{aligned} \tag{32}$$

est positive, ce qui se produit sous les conditions suivantes :

Condition C1 $2v'' + s_t f' v''' > 0$ *(ce qui implique que* $v''' > 0$*) : face à un risque de taux d'intérêt et de revenu, un agent sera incité à augmenter sa demande d'épargne et donc constitue une « épargne de précaution ».*

Condition C2 (a) $F_L > kF_{KL}$, *et le montant des pensions espérées croît avec le taux de croissance moyen de la population.*

Condition C2 (b) $F_{LKK} < 0$.

Remarque :

Dans l'exemple et plus particulièrement dans le cas de pensions ajustables, nous avons vu que le montant des pensions est une fonction croissante du taux de croissance moyen de la population. En effet, la condition C2 s'écrivant alors $F_L = (1-\alpha)k^{\alpha} > kF_{LK} = k\alpha(1-\alpha)K^{\alpha-1}L^{-\alpha}$ où $k = K/L$, est vérifiée si et seulement si $L > \alpha$. À l'équilibre la demande de travail s'égalise à l'offre, donc est égale au nombre d'individus nés à cette période. α étant inférieur à 1, par hypothèse, la condition C2 est vérifiée lorsque la taille de la population est supérieure à 1. C'est pourquoi, l'ambiguïté est levée dès lors que nous connaissons l'effet d'une variation du taux d'intérêt sur l'épargne qui dépend de la valeur de l'élasticité de substitution intertemporelle (Sandmo [1970]).

À cet effet d'équilibre partiel s'ajoute un effet d'équilibre général décrit par l'expression

$$\frac{a^2 s_t}{(1+n+a\bar{\epsilon})^3}\left(2f'' + \frac{s_t f'''}{1+n+a\bar{\epsilon}}\right) \times (v' + s_t f' v'')$$

dont le signe est indéterminé *a priori*.

L'effet retour est positif sous la condition suivante :

Condition C3

1. *H3(a) est vraie et l'effet revenu l'emporte sur l'effet substitution et* $kf'(k)$ *est strictement concave en* k *;*
2. *ou l'effet substitution l'emporte sur l'effet revenu et* $kf'(k)$ *est strictement convexe en* k.

Nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 5 *Dans le cas de cotisations fixes, sous les hypothèses H1 et H2 et sous les conditions C1 et C3, une épargne de précaution est constituée à l'équilibre.*

Pension de retraite fixe. Lorsque la pension de retraite est fixe, la dérivée cherchée est :

$$\frac{-a^2 s_t^3 f''}{(1+n+a\epsilon)^4}\left(2v'' + s_t f' v'''\right) + \frac{a^2 s_t}{(1+n+a\epsilon)^3} \times \left[\left(2f'' + \frac{s_t f''}{(1+n+a\epsilon)}\right)(v' + s_t f' v'')\right]. \tag{33}$$

Nous distinguons là encore deux effets. Cependant, les agents n'ont plus de risque de revenu de seconde période, mais font simplement face à un risque de taux d'intérêt. Suite à un accroissement de risque, nous obtenons :

- *Un premier effet qui peut être positif («effet de précaution»).* Les agents forment une épargne de précaution si $2v'' + s_t f' v''' > 0$ (ce qui implique que $v''' > 0$).
- *Un deuxième «effet d'équilibre général».* Si les agents ont constitué une épargne de précaution, le taux d'intérêt de la période $t+1$ diminue et sous la condition C3, cet effet est positif.

Nous avons donc :

Proposition 6 *Dans le cas de pensions fixes, sous les hypothèses H1 et H2 et sous les conditions $2v'' + s_t f' v''' > 0$ et C3, une épargne de précaution est constituée à l'équilibre.*

Nous voyons donc qu'il faut des conditions supplémentaires à celles habituelles (dérivée tierce positive) pour que se forme une épargne de précaution. Il faut donc relativiser les caractérisations obtenues dans la littérature sur l'épargne de précaution (les conditions suffisantes en équilibre général étant par ailleurs relatives à la formulation adoptée).

4.2.2 L'effet d'un changement du risque à moyenne constante sur l'épargne à l'équilibre

Nous supposons désormais que la variable $\tilde{\varepsilon}$ suit une loi de distribution de probabilités notée $F(\epsilon)$ telle que F soit obtenue par un étalement préservant la moyenne (MPS) de G.

Taux de cotisation de retraite fixé. Nous avons alors :

Proposition 7 *Suite à un accroissement de risque MPS, l'épargne s'accroît (resp. décroît, reste constante) si et seulement si la fonction :*

$$h : [\underline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}] \to R$$

$$\varepsilon \to h(\epsilon) = f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}\right)v'\left[s_t f'\left(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}\right) + (1+n+a\epsilon)x\right]$$

est convexe (resp. concave, linéaire).

L'épargne s'accroît suite à un accroissement de risque lorsque :

$$\forall \epsilon \in [\underline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}], \tag{34}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left\{ f'(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}) v' \left[s_t f'(\frac{s_t}{1+n+a\epsilon}) + (1+n+a\epsilon)x \right] \right\} > 0 .$$

Nous avons déja rencontré cette condition dans l'étude de la formation d'une épargne de précaution à l'équilibre général. Nous avons vu que la positivité de la dérivée n'est bien entendu pas garantie (équation (29)). Il apparaît deux effets sur les pensions : d'une part, l'augmentation du risque implique une volatilité plus élevée du nombre de cotisants ; d'autre part, une plus grande volatilité entraîne un risque sur le salaire des jeunes de demain et une plus grande volatilité du montant du taux de cotisation.

Dans la partie précédente, nous avons donné un ensemble de conditions suffisantes pour signer la dérivée. Bien que nous retrouvons les mêmes caractéristiques pour l'étude d'un accroissement de risque, l'interprétation diffère.

À l'échelle micro-économique, l'effet d'un accroissement de risque provoque une augmentation (resp. diminution) de l'épargne si et seulement si l'expression H (définie par l'équation (32)) est positive (resp. négative).

Par souci de simplicité, nous supposons que le montant des pensions espérées croît avec le taux de croissance moyen de la population (condition C2).

De plus, nous pouvons vérifier que l'expression

$$\left(\frac{-s_t^2 f''}{(1+n+a\widetilde{\epsilon})^2} + x \left(F_L - \frac{s_t F_{LK}}{1+n+a\widetilde{\epsilon}} \right) \right)$$

est toujours positive en vertu de la propriété d'Euler.

Les risques de taux d'intérêt et de revenu étant corrélés, suivant l'étude de Etner [1996], nous obtenons la caractérisation du comportement prudent suivante[(4)]. Si l'effet de l'accroissement du risque de pensions est perçu comme plus important que celui du risque de taux d'intérêt, les agents prudents sont incités à augmenter leur demande d'épargne (et H est positif). En revanche, si l'effet de l'accroissement du risque de pensions est plus faible que celui du risque de taux d'intérêt,

(4) Cependant, nous ne pouvons pas établir de relation précise entre l'effet dû à l'accroissement du risque des pensions et celui du taux d'intérêt permettant de définir l'importance relative entre eux.

les agents prudents vont diminuer leur demande d'épargne (et H est négatif).

L'effet retour d'équilibre général pourra renforcer ou non cet effet suivant la réponse de l'épargne au taux d'intérêt.

Nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 8 *Sous les hypothèses H1, H2 et la condition C2, dans le cas de cotisations fixes, suite à un accroissement de risque du taux de croissance de la population, si les agents sont prudents alors*

1. *si l'accroissement du risque des pensions est plus important que celui du taux d'intérêt, l'épargne augmente à l'équilibre lorsque la condition C3 est vérifiée.*
2. *si l'accroissement du risque des pensions est plus faible que celui du taux d'intérêt, l'épargne diminue à l'équilibre lorsque la condition C3 n'est pas vérifiée.*

Nous constatons que le comportement de précaution des agents n'est plus suffisant pour déterminer les effets d'un accroissement de risque à l'équilibre.

Remarque :

Dans l'exemple traité précedemment, le comportement de précaution était donné par la valeur du paramètre σ. La condition C3 est alors vérifiée lorsque $\sigma > 1$, c'est-à-dire que l'effet revenu l'emporte sur l'effet substitution. En effet, il s'agit du seul cas envisageable puisque la fonction de production Cobb-Douglas vérifie l'hypothèse H3-a et la concavité de $kf'(k)$. Dans ce cas, nous avions bien que l'épargne augmente suite à un accroissement du risque.

Pension de retraite fixe. Nous procédons comme pour le cas précédent. L'intégrande de la dérivée cherchée correspond à l'équation (33). Les conclusions obtenues dans le cas précédent s'appliquant ici de façon identique, nous avons le résultat suivant.

Proposition 9 *Dans le cas de pensions fixes, sous les hypothèses H1 et H2, si la condition C3 n'est pas vérifiée et si les agents sont prudents, alors l'épargne d'équilibre diminue avec un accroissement de risque à moyenne constante.*

Dans le cas de pensions fixes, seul le risque de taux d'intérêt est présent. Un individu prudent diminue alors sa demande d'épargne suit à un accroissement de risque (Langlais [1995]). Cependant, pour obtenir cet effet en équilibre général, il faut là encore des conditions supplémentaires. Nous constatons là encore que l'exemple illustre cette proposition. Cependant, les fonctions utilisées dans l'exemple ne permettent de préciser tous les effets d'équilibre général.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons étudié l'influence d'un aléa sur le taux de croissance de la population sur l'épargne d'équilibre en utilisant un modèle à générations imbriquées. Nous avons analysé cette influence en considérant deux modes d'ajustements de la caisse des retraites.

Dans le cas d'ajustement par les pensions (taux de cotisations fixes), l'aléa entraîne une corrélation entre les deux variables risquées, le montant des pensions et le taux d'intérêt. Sous certaines conditions, il existe une épargne de précaution à l'équilibre. Nous avons montré qu'il est nécessaire d'identifier la perception de l'accroissement des deux risques pour les individus. Les comportements des agents, et donc l'épargne d'équilibre, dépendent de l'importance des effets des deux risques. En fait, un accroissement de risque du montant des pensions incite les agents à détenir plus d'épargne s'ils sont prudents tandis qu'un accroissement de risque de taux d'intérêt les incite à la diminuer. Il en résulte une ambiguïté sur l'épargne d'équilibre.

Dans le cas de taux de pensions fixes, l'analyse est plus simple dans la mesure où il n'apparaît qu'un seul type de risque : le risque de taux d'intérêt. Dans ce cas, si les agents sont prudents, ils diminuent leur demande d'épargne suite à un accroissement de risque, et sous certaines conditions l'épargne d'équilibre peut diminuer.

Les résultats précédents ont un intérêt en ce qui concerne les politiques fiscales de promotion des fonds de pension. Nous avons en effet identifié des conditions sous lesquelles un accroissement du risque démographique conduit à un accroissement de l'épargne. Sous de telles conditions, les avantages fiscaux semblent peu utiles. Dans le cas contraire, l'encouragement fiscal au développement des fonds de pensions pourrait être pertinent.

Le présent article souffre de trois défauts - au moins - auxquels des recherches ultérieures devraient remédier.

Tout d'abord, nous avons choisi d'utiliser la représentation von Neumann-Morgenstern afin de comprendre les effets de ce type d'incertitude sur l'épargne de la façon la plus simple possible bien que certaines indéterminations subsistent. Cependant, cette représentation présente l'inconvénient de confondre les rôles de l'aversion pour le risque et de l'élasticité de substitution intertemporelle. Nous envisageons par la suite d'utiliser une représentation Selden-Kreps-Porteus afin de comprendre plus précisément les déterminants de l'épargne d'équilibre.

Ensuite, nous n'avons pris en compte qu'un type particulier de risque démographique, le risque sur le taux de croissance de la population. Il serait intéressant d'envisager également le risque sur la durée de vie moyenne. Si l'on s'accorde à penser que la durée de vie moyenne devrait augmenter dans les années à venir, le rythme de son augmentation semble encore incertain.

Enfin, le contexte économique dans lequel se produira le vieillissement démographique est peu prévisible et affectera la façon dont résoudra les difficultés de financement des régimes de retraites. La prise en compte de l'incertitude sur le contexte économique futur pourrait être étudiée en introduisant un aléa sur la productivité globale des facteurs.

BIBLIOGRAPHIE

AUGIER, L., T. CHAUVEAU et C. LOUPIAS [1995], Epargne privée et retraite par répartition dans un modèle de croissance optimale en avenir incertain et avec générations d'agents, *Revue Economique*, **46**(2), pp. 195–215.

BIAIS, B. et B. SIRE [1994], Financer les entreprises, *Le Monde*, Editions du mardi 25 octobre.

BLANCHET, D. [1990], Retraites par capitalisation et par répartition selon le contexte démographique : quelques résultats comparatifs, *Annales d'Economie et de Statistiques*, **18**(Avril/Juin), pp. 63–90.

BRANDTS, J. et C.A.M.DE BARTOLOME [1992], Population uncertainty, social insurance, and acturial bias, *Journal of Public Economics*, **47**(3), pp. 361–380.

DIAMOND, P. [1965], National Debt in a Neo-classical Growth Model, *American Economic Review*, **55**(Décembre), pp. 1126–1150.

EECKHOUDT, L., H. SNEESSENS et F. CALCOEN [1992], L'épargne de précaution et les changements de risque, *in* G. DIONNE (sous la direction de), *Incertain et Information*, Paris ? ?, Economica, pp. 213–224.

ETNER, J. [1996], Savings under uncertainty with correlated risks : the income and interest rates risks, Document de travail, Cahiers Eco&Maths n° 96.55.

HAGEMANN, R.P. et G. NICOLETTI [1989], Les effets économiques du vieillissement démographique et ses conséquences pour le financement des retraites publiques, *Revue Economique de l'OCDE*, **12**(printemps), pp. 59–110.

KESSLER, D. [1990], L'économie des rapports entre générations : une vue pessimiste à court terme, *La documentation française*, Numéro spécial consacré aux Actes du séminaire «Avenir de la population», Paris, 5 avril 1990, organisé par le Haut conseil de la population et de la famille.

LANGLAIS, E. [1995], Aversion au risque et prudence. Le cas d'un risque de taux d'intérêt, *Revue Economique*, **46**(4), pp. 1090–1120.

LELAND, H.E. [1968], Saving and uncertainty: The precautionary demand for saving, *Quarterly Journal of Economics*, pp. 465–473.

MAURO, P. [1995], Stock markets growth. A brief caveat on precautionary savings, *Economics Letters*, **47**(1), pp. 11-16.

SAINT-PAUL, G. [1994], Quelques idées reçues...', *Le Monde*, Editions du Mardi 25 octobre.

SANDMO, A. [1970], The Effect of Uncertainty on Saving Decisions, *Review of Economic Studies*, pp. 353–360.

SMITH, A. [1982], Intergenerational transfers as social insurance, *Journal of Public Economics*, **19**(1), pp. 97–106.

SMITH, R.T. [1996], Cyclical uncertainty, precautionary saving and economic growth, *Economica*, **63**, pp. 477–494.

WANG, Y. [1993], Stationary equilibria in an overlapping generation economy with stochastic production, *Journal of Economic Theory*, **61**(2), pp. 423–435.