Progrès technique et durée de vie du capital

Marc Germain[1]   Alphonse Magnus[2]

Mars 1999

Résumé.

Cet article analyse l'influence de variables telles que le taux de progrès technique ou le taux de préférence intertemporel sur la durée de vie du capital. L'analyse est réalisée au moyen d'un modèle de croissance avec technologie du type putty-clay, et où le progrès technique résulte de l'effort de recherche des agents. Contrairement à certains résultats récents obtenus au moyen de modèles où le progrès technique est exogène, on montre qu'une hausse du taux de progrès technique ou qu'une baisse du taux de préférence intertemporel ne se traduit pas nécessairement par une accélération de l'obsolescence économique.

[1]CORE, Université Catholique de Louvain. Courriel : germain@core.ucl.ac.be .

[2]Institut de Mathématique, Université Catholique de Louvain.
Courriel : magnus@anma.ucl.ac.be .

Les auteurs remercient R. Boucekkine pour ses conseils et commentaires.

1

Introduction

Un des intérêts des modèles à générations de capital par rapport à leurs correspondants avec capital homogène est de pouvoir prendre explicitement en considération le phénomène de *création destructrice*. Celui-ci se caractérise par le fait que la durée du vie du capital existant est influencée par l'investissement en nouveaux équipements. Certaines contributions récentes (Aghion et Howitt (1994), Boucekkine et al. (1997), Germain et Magnus (1998)) ont mis en évidence, le long de trajectoires de croissance équilibrée, une relation inverse entre durée du vie du capital et taux de progrès technique[3]. Cette relation correspond à l'intuition : un taux de progrès technique plus élevé augmente les performances relatives d'une nouvelle machine par rapport au capital existant, et donc accroît l'incitation au remplacement. Par ailleurs, Boucekkine et al. (1997) ont montré qu'un taux de préférence intertemporel plus élevé se traduisait par un renchérissement du coût du capital, et donc par un ralentissement de l'obsolescence économique.

Les résultats précités ont été obtenus sous une hypothèse importante, à savoir que le progrès technique est exogène. Le but de la présente note est de montrer que dans le cas où celui-ci est endogène, les relations entre, notamment, durée de vie du capital et taux de progrès technique ou taux de préférence intertemporel deviennent beaucoup plus complexes. Une hausse de ce dernier ne se traduit pas nécessairement par une hausse de l'âge du plus vieil équipement. De même, une hausse du taux de progrès technique ne s'accompagne pas systématiquement d'une accélération de l'obsolescence du capital en place.

Le modèle développé dans cette note présuppose que le progrès technique résulte de la décision des agents tant au niveau de son rythme que de son orientation en termes d'économie de travail ou de capital. Formellement, nous postulons que la technologie est du type *putty-clay* avec progrès technique endogène[4]. Le déplacement des isoquants qui caractérisent la technologie des générations successives avant leur installation est fonction de l'effort de recherche fournis par les agents, dans la tradition de la littérature relative aux *frontières des possibilités d'innovation* (Kennedy (1964), Samuelson

[3]Dans le modèle de Boucekkine et al. (1997), il est théoriquement possible que T et γ évoluent dans le même sens. Toutefois, pour des valeurs raisonnables des paramètres, ces 2 grandeurs varient bien en sens opposés.

[4]En ce sens, la présente note se situe à la croisée (très peu fréquentée à notre connaissance) de la littérature relative à la croissance endogène et de celle relative aux modèles avec générations de capital. D'autres contributions du genre sont celles de de Mello (1995) et de Aghion et Howitt (1994).

(1965), Nordhaus (1968)).

Le papier est structuré de la façon suivante. La section 1 décrit l'économie et dérive les conditions pour un optimum local. Dans la 2ème section, on déduit la frontière des possibilités d'innovation à partir de la fonction de production caractérisant un équipement avant son installation. Ensuite, on décrit le sentier de croissance équilibrée à taux constant. Dans la 3ème section, le système d'équations qui définit le sentier de croissance équilibrée est résolu numériquement, ce qui nous permet de procéder à l'analyse de statique comparative.

1. Description de l'économie

1.1. **Le problème.** Soit une économie planifiée, dont le planificateur alloue les ressources entre consommation, investissement et recherche technologique de façon à résoudre le problème suivant :

$$\max \int_0^\infty u(c(t))e^{-\delta t}dt \tag{1.1}$$

par rapport aux fonctions $\iota(t), y(t), x(t)$ sous les contraintes :

$$y(t) = \int_{t-T(t)}^t \frac{\iota(\tau)}{b(\tau)}d\tau \tag{1.2}$$

$$1 = \int_{t-T(t)}^t q(\tau)\frac{\iota(\tau)}{b(\tau)}d\tau + q(t)x(t)y(t) \tag{1.3}$$

$$y(t) = c(t) + \iota(t) \tag{1.4}$$

$$\dot{q}(t) = -\gamma(t)q(t) \tag{1.5}$$

$$\dot{b}(t) = -f(\gamma(t), x(t))b(t) \tag{1.6}$$

$$0 \leq \iota(t) \leq y(t) \tag{1.7}$$

$$0 \leq \gamma(t), x(t) \tag{1.8}$$

les fonctions $\iota(t)$, $q(t)$ et $b(t)$ étant données pour $t < 0$. y, c et ι sont respectivement la production, la consommation et l'investissement. La fonction d'utilité $u(c)$ est continue, croissante et concave sur $[0, \infty[$. Le taux de préférence intertemporel δ est strictement positif[5].

[5]On suppose que δ est suffisamment grand pour que (1.1) aie un sens.

La technologie est à générations de capital, et est déterminée par les relations (1.2) et (1.3). $T(t)$ est la marge extensive, c'est-à-dire l'âge de la plus vieille machine en activité à la date t. La génération de capital installée à la date t a exigé un investissement égal à $\iota(t)$ et a une capacité de production égale à $\iota(t)/b(t)$. $b(t)$ est donc l'inverse de la productivité du capital de la génération t. Celle-ci exige par unité produite une quantité de travail $q(t)$. L'emploi total est fixe et normalisé à 1. Comme l'indique le membre de droite de (1.3), l'emploi se répartit entre celui des ouvriers qui fabriquent les biens de production $y(t)$ (le premier terme) et celui des chercheurs qui contribuent au progrès technologique (le deuxième terme). $x(t)$ est un indicateur qui mesure l'intensité de l'effort de recherche rapporté au niveau de production. Anticipant quelque peu sur la section 2, on peut montrer que le long d'un sentier de croissance à taux constant, x mesure approximativement le rapport entre l'emploi des chercheurs et celui des ouvriers[6]. La recherche n'utilise comme facteur que le travail des chercheurs, dont la productivité est supposée s'aligner sur celle des ouvriers travaillant sur la dernière génération installée[7]. Le nombre de chercheurs vaut donc $q(t)x(t)y(t)$.

L'évolution du progrès technique (c'est-à-dire de $q(t)$ et $b(t)$) est déterminée par les relations (1.5) et (1.6). La fonction f décrit, à la manière de Kennedy (1964), Samuelson (1965) ou Nordhaus (1969, ch.6), la *frontière des possibilités d'innovation* à la disposition du planificateur. Cette fonction est supposée concave et vérifier $\partial f/\partial\gamma < 0$ et $\partial f/\partial x > 0$. Le planificateur décide de l'intensité de l'effort de recherche $x(t)$, ainsi que des gains de productivité du travail $\gamma(t)$ entre deux générations successives. Ce faisant, il détermine à la fois la direction et le taux du progrès technique. En effet,

[6]En effet, le long d'un tel sentier, on a $\gamma(t) = \gamma$, $b(t) = b$, $T(t) = T$, $\iota(t) = \iota(0)e^{\gamma t}$, $y(t) = y(0)e^{\gamma t}$ et $q(t) = q(0)e^{-\gamma t}$. Alors (1.3) et (1.4) impliquent que

$$l(t) = \int_{t-T}^{t} q(\tau)\frac{\iota(\tau)}{b}d\tau = q(t)\iota(t)\frac{T}{b}$$

est l'emploi des ouvriers, tandis que

$$l^R(t) = q(t)x(t)y(t) = q(t)x(t)\frac{\iota(t)}{b}\frac{1-e^{-\gamma T}}{\gamma}$$

mesure l'emploi des chercheurs. Par conséquent,

$$\frac{l^R(t)}{l(t)} = x(t)\frac{1-e^{-\gamma T}}{\gamma T} \simeq x(t)$$

pour γT pas trop grand (ce qui sera le cas dans le cadre de l'analyse de la section 3).

[7]Le progrès technique qui résulte du travail des chercheurs est donc, à la manière des modèles agrégés, un progrès technique "moyen", qui porte sur l'ensemble des activités, production et recherche.

à effort de recherche x donné, plus celui-ci est axé sur l'économie de travail, moins élevés sont les gains de productivité du capital. A γ donné, plus l'effort de recherche x est élevé, plus les gains de productivité du capital le sont aussi.

Dans le cadre de l'analyse des sentiers de croissance équilibrée faite à la section 3, on se donnera des formes explicites pour les fonctions $u(c)$ et $f(\gamma, x)$. On pourra alors montrer que la frontière des possibilités d'innovation f peut être dérivée de la fonction de production *ex ante* qui caractérise un nouvel équipement avant son installation. En ce sens, le présent modèle apparaîtra comme un modèle *putty-clay* avec progrès technique endogène, qui généralise e.a. le modèle *clay-clay* avec progrès technique exogène de Boucekkine et al. (1997).

1.2. **Résolution.** En s'inspirant de Malcomson (1975), après inversion de l'ordre d'intégration et quelques manipulations, on peut écrire le lagrangien du problème de contrôle optimal (1.1 à 1.8) sous la forme :

$$\mathcal{L} = \int_0^{\infty} \Big\{ [u(y(t) - \iota(t)) + w(t)[1 - q(t)x(t)y(t)] - \Phi(t)y(t)]e^{-\delta t}$$

$$+ \frac{\iota(t)}{b(t)} \int_t^{t+J(t)} [\Phi(\tau) - w(\tau)q(t)]e^{-\delta\tau} d\tau - \lambda(t)[\dot{q}(t) + \gamma(t)q(t)]$$

$$-\eta(t)[\dot{b}(t) + f(\gamma(t), x(t))b(t)] \Big\} \, dt + \int_{-T(0)}^{0} \frac{\iota(t)}{b(t)} \int_t^{t+J(t)} [\Phi(\tau) - w(\tau)q(t)]e^{-\delta\tau} d\tau \tag{1.9}$$

où par définition

$$J(t) = T(t + J(t)) \tag{1.10}$$

et où $\Phi(t)$, $w(t)$, $\lambda(t)$ et $\eta(t)$ sont les multiplicateurs de Lagrange respectivement associés aux contraintes (1.2), (1.3), (1.5) et (1.6). L'équation (1.10) indique que $J(t)$, la durée de vie anticipée des nouvelles machines installées en t, est égal à l'âge de mise au rebut $T(.)$ évalué à la date $t + J(t)$, date à laquelle ces nouvelles machines seront déclassées.

Au problème de maximisation de $\mathcal{L}$, on peut associer l'hamiltonien

$$\mathcal{H}(t) = [u(y(t) - \iota(t)) + w(t)[1 - q(t)x(t)y(t)] - \Phi(t)y(t)]e^{-\delta t}$$

$$+ \frac{\iota(t)}{b(t)} \int_t^{t+J(t)} [\Phi(\tau) - w(\tau)q(t)]e^{-\delta\tau} d\tau - \lambda(t)\gamma(t)q(t) - \eta(t) f(\gamma(t), x(t))b(t) \tag{1.11}$$

Les conditions du premier ordre (c'est-à-dire les dérivées partielles de $\mathcal{H}(t)$ par rapport à $y(t)$, $\iota(t)$, $J(t)$, $x(t)$ et $\gamma(t)$) pour qu'une solution intérieure du problème d'optimisation existe s'écrivent, $\forall t > 0$:

$$u'(y(t) - \iota(t)) = w(t)q(t)x(t) + \Phi(t) \tag{1.12}$$

$$u'(y(t) - \iota(t))e^{-\delta t} = \frac{1}{b(t)} \int_t^{t+J(t)} [\Phi(\tau) - w(\tau)q(t)]e^{-\delta\tau} d\tau \tag{1.13}$$

$$\Phi(t + J(t)) - w(t + J(t))q(t) = 0 \tag{1.14}$$

$$w(t)q(t)y(t)e^{-\delta t} = -\eta(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t), x(t))b(t) \tag{1.15}$$

$$\lambda(t)q(t) = -\eta(t)\frac{\partial f}{\partial \gamma}(\gamma(t), x(t))b(t) \tag{1.16}$$

Les conditions associées aux variables d'état $q(t)$ et $b(t)$ s'écrivent

$$\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)\gamma(t) + w(t)x(t)y(t)e^{-\delta t} + \frac{\iota(t)}{b(t)} \int_t^{t+J(t)} w(\tau)e^{-\delta\tau} d\tau \tag{1.17}$$

$$\dot{\eta}(t) = \eta(t)f((\gamma(t), x(t)) + \frac{\iota(t)}{b^2(t)} \int_t^{t+J(t)} [\Phi(\tau) - w(\tau)q(t)]e^{-\delta\tau} d\tau \tag{1.18}$$

Du fait qu'on a imposé la contrainte $\gamma(t) \geq 0$ (cfr. (1.8)), on a nécessairement $\dot{J}(t) > -1$. Autrement dit, une génération plus récente ne sera jamais déclassée avant une plus ancienne[8]. De (1.12) et (1.14) après changement de variable en utilisant (10), il découle

$$\frac{u'(y(t) - \iota(t))}{q(t)x(t) + q(t - T(t))} = w(t) \tag{1.19}$$

Cette équation établit que le coût marginal du travail (le salaire à l'équilibre décentralisé) est égal à la productivité marginale du travail (l'inverse du travail requis par la machine la plus vieille en activité et par l'effort de recherche marginal), que multiplie l'utilité marginale de la consommation. (1.14) décrit la règle d'investissement optimal et établit que le coût marginal de l'investissement doit être égal à son revenu marginal, qui dépend de la

[8]La contrainte (1.8) se justifie dans le contexte du présent papier dans la mesure où l'analyse se limitera à celle de sentiers de croissance équilibrée caractérisés par cette propriété.

durée de vie anticipée de la nouvelle machine.

Par ailleurs, à partir de (1.5), (1.6) et (1.13), (1.17) et (1.18) peuvent se réécrire :

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)q(t)) = w(t)q(t)x(t)y(t)e^{-\delta t} + \frac{\iota(t)}{b(t)}\int_t^{t+J(t)} w(\tau)q(t)e^{-\delta\tau}d\tau \tag{1.20}$$

$$\frac{d}{dt}(\eta(t)b(t)) = \iota(t)u'(y(t)-\iota(t))e^{-\delta t} \tag{1.21}$$

On retrouve à droite de (1.20) la somme des coûts actualisés du travail affecté à la recherche et à la génération installée à la même période, tandis que le membre de droite de (1.21) est simplement le coût actualisé de l'investissement, multipliée par l'utilité marginale de la consommation.

En annexe 1, on vérifie que la trajectoire déterminée par (2) à (6) et (12) à (18) constitue bien un *maximum local*.

2. L'équilibre stationnaire

Afin de calculer le sentier de croissance équilibrée, nous devons spécifier la fonction d'utilité u et la frontière des possibilités d'innovation f. Par la suite, nous ferons l'hypothèse que $u(c) = c^\theta/\theta$, où $\theta \leq 1$ et $\theta \neq 0$. Quant à la fonction f, plutôt que de se donner une fonction *ad hoc* ayant les propriétés désirées, nous choisissons de la dériver de la fonction de production ex ante associée à chaque génération de capital avant son installation. C'est l'objet du point suivant.

2.1. **La frontière des possibilités d'innovation.** Le planificateur est supposé disposer d'une technologie de type *putty-clay*, au sens où les facteurs de production travail et capital sont substituables avant l'installation d'une génération donnée, et complémentaires une fois que celle-ci est en activité.

Ex ante, la courbe d'iso-production caractéristique de la génération t est supposée de type Cobb-Douglas :

$$z(t) = A(t)\iota(t)^\alpha v(t)^{1-\alpha} \tag{2.1}$$

où $0 < \alpha < 1$. $z(t)$, $\iota(t)$ et $v(t)$ sont respectivement la capacité de production, l'investissement et l'emploi associé à la génération t. $A(t)$ est un paramètre positif qui mesure la hauteur de l'isoquant. Après division des deux membres de (2.1) par $z(t)$ et différentiation par rapport au temps, on obtient

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \alpha\frac{\dot{b}(t)}{b(t)} + [1-\alpha]\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = 0 \tag{2.2}$$

$\dot{A}/A$ mesure le déplacement de l'isoquant, autrement dit le progrès technique. Le planificateur est supposé contrôler le progrès tehnique via les ressources qu'il affecte à la recherche. Formellement, on postule que $\dot{A}(t)/A(t) = \varphi(x(t))$, où $x(t)$ est l'intensité de l'effort de recherche à la date t et où $\varphi' > 0$, $\varphi'' < 0$ et $\varphi(0) = 0$. (2.2) devient alors

$$\frac{\dot{b}(t)}{b(t)} = -f(\gamma(t), x(t)) = -\frac{\varphi(x(t))}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha}\gamma(t) \tag{2.3}$$

On retrouve donc une fontière des possibilités d'innovation ayant les propriétés postulées à la sous-section 1.1.

2.2. **Sentiers de croissance équilibrée.** Un sentier de croissance équilibrée (SCE) à taux constant satisfait les conditions (1.2) à (1.6) et (1.12) à (1.18) tout en se caractérisant par un taux de progrès technique neutre au sens de Harrod ($\dot{q}(t)/q(t) = -\gamma$ et $\dot{b}(t) = 0$). Dans ce cas, (2.3) induit que x est constant et que

$$\varphi(x) = [1-\alpha]\gamma \tag{2.4}$$

Si on admet que $\iota(t) = \iota(0)e^{\gamma t}$, on déduit de (1.3) et (1.10) que T et J sont constants. De ce fait, $y(t)$ croît aussi au taux γ (en vertu de (1.2)) et le rapport $y(t)/\iota(t) = [1 - e^{\gamma T}/b\gamma]$ est lui aussi constant.

Vu les informations qui précèdent, en particulier les formes choisies pour $u(c)$ et $f(\gamma, x)$, (1.12), (1.13) et (1.19) impliquent après quelques calculs que

$$[1 - b[\delta + \gamma[1-\theta]]e^{\gamma T} = 1 + b[\delta + \gamma[[1-\theta]]x - \gamma\frac{1 - e^{[\gamma\theta-\delta]T}}{\gamma\theta - \delta} \tag{2.5}$$

De (1.12), (1.15), (1.16) et (1.17), il ressort que

$$[\gamma\theta - \delta]\frac{\alpha - 1}{\varphi'(x)} - x = \frac{\gamma}{1 - e^{-\gamma T}}\frac{e^{[\gamma\theta-\delta]T} - 1}{\gamma\theta - \delta} \tag{2.6}$$

Enfin, de (1.15) et (1.18), il découle :

$$[\delta - \gamma\theta]\frac{1 - e^{-\gamma T}}{b\gamma} = \frac{\varphi'(x)}{\alpha}[x + e^{\gamma T}] \tag{2.7}$$

Les équations (2.4) à (2.7) déterminent le sentier de croissance équilibrée à taux constant et forment un système de 4 équations à quatre inconnues γ,

x, T et b. Les paramètres exogènes sont δ, θ, α et ceux qui caractérisent la fonction $\varphi(x)$.

3. calcul du SCE et statique comparative

Le système d'équations (2.4) à (2.7) est trop complexe pour être traité tel quel de façon analytique. En revanche, il peut être résolu numériquement pour un certain jeu de valeurs des paramètres exogènes. L'annexe 2 décrit la méthode qui a été suivie. Les résultats sont présentés ci-dessous dans le cas où $\varphi(x) = kx^{\beta}$, où k et β sont deux constantes positives et où $\beta < 1$. L'annexe 3 décrit une autre approche, analytique celle-là, consistant à simplifier le système (2.4) à (2.7) au moyen d'approximations du premier ou deuxième ordre.

Afin de procéder à une analyse de statique comparative, il importe de déterminer au préalable un SCE de référence par rapport auquel les comparaisons peuvent être effectuées. En théorie, il existe un grand choix de valeurs pour les paramètres exogènes : $\delta > 0$, $\theta \leq 1$, $0 < \alpha < 1$, $k > 0$, $0 < \beta < 1$. En pratique cependant, on a observé que les choix étaient limités si on désirait que le SCE de référence soit caractérisé par des valeurs "raisonnables". Les valeurs qui caractérisent le SCE de référence, ainsi que celles se rapportant aux sentiers obtenus après variation d'un des paramètres exogènes sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Résultats de statique comparative

		δ	θ	k	β	α	γ(%)	T	x(%)	b
	1	1.0	-1.00	.25	.02	.10	2.03	25.77	6.40	3.65
$\triangle\delta$	2	2.0	-1.00	.25	.02	.10	1.94	25.73	4.13	3.36
	3	3.0	-1.00	.25	.02	.10	1.87	25.69	2.87	3.09
$\triangle\theta$	4	1.0	-0.67	.25	.02	.10	2.10	25.84	9.26	3.88
	5	1.0	-0.43	.25	.02	.10	2.18	25.96	13.06	4.06
	6	1.0	-0.25	.25	.02	.10	2.25	26.19	18.27	4.22
$\triangle k$	7	1.0	-1.00	.30	.02	.10	2.17	29.01	6.48	4.49
	8	1.0	-1.00	.35	.02	.10	2.34	31.68	6.59	5.22
$\triangle\beta$	9	1.0	-1.00	.25	.015	.10	1.50	34.34	5.47	4.74
	10	1.0	-1.00	.25	.025	.10	2.56	20.63	7.06	2.97
	11	1.0	-1.00	.25	.03	.10	3.09	17.20	7.57	2.51
$\triangle\alpha$	12	1.0	-1.00	.25	.02	.15	1.88	28.49	9.55	3.99
	13	1.0	-1.00	.25	.02	.20	1.77	30.94	12.77	4.28
	14	1.0	-1.00	.25	.02	.25	1.69	33.13	16.10	4.54

Avant d'analyser le tableau, il importe de souligner que dans l'espace de variation des paramètres exogènes étudié (c'est-à-dire autour du SCE de référence), il apparaît (au moins numériquement) qu'*à chaque jeu de paramètres exogènes correspond un seul SCE caractérisé par des valeurs des paramètres endogènes* (γ, T, x, b) *admissibles* [9].

La ligne 1 du tableau décrit le SCE de référence. Les lignes 2 et 3 décrivent des SCE obtenus en augmentant δ respectivement à .02 et .03, les autres paramètres exogènes restant inchangés. On observe que quand l'impatience à l'égard de la consommation augmente, l'incitation à affecter des recherches diminue (x baisse). γ baisse en conséquence à cause de (2.4); moins de recherche se traduit par une baisse du taux de progrès technique. Une observation intéressante réside dans le fait que *la hausse de* δ *s'accompagne d'une légère baisse de* T. Ceci est en contradiction avec un résultat récent de Boucekkine et al.(1997), où la plus grande impatience des agents renchérit le coût de remplacement du capital, rendant optimal de retarder le déclassement des vieilles machines. En fait, cette contradiction n'est qu'apparente, car le résultat de Boucekkine et al. a été obtenu dans le cadre d'un modèle clay-clay, c'est-à-dire avec b et q exogènes. Dans le cadre présent, le planificateur peut réagir à l'augmentation du coût de remplacement en réoriantant le progrès technique de façon à diminuer b. Et c'est bien ce que montrent les lignes 2 et 3 du tableau.

Les lignes 4 à 6 décrivent comment évolue le SCE quand θ varie. Comme chez Boucekkine et al. (1997), l'impact d'une baisse de θ est semblable à celle d'une hausse de δ. Plus θ est petit, plus petite est l'élasticité de substitution $\sigma = -u''(c)c/u'(c) = 1/1-\theta$, et moins il est aisé en termes d'utilité de sacrifier de la consommation aujourd'hui pour en obtenir d'avantage dans le futur.

Les lignes 7 et 8 décrivent l'évolution du SCE quand le paramètre k de la fonction $\varphi(x)$ varie. k mesure la part du progrès technique "tombant du ciel", au sens où, si k augmente, le déplacement de la frontière des possibilités d'innovation s'accélère à effort de recherche x inchangé. Ceteris paribus, la recherche étant plus performante, le planificateur y consacre plus

[9] Numériquement, on constate l'existence de deux SCE pour un vecteur de paramètres donné. Cependant, un seul a des valeurs admissibles pour tous les paramètres endogènes. L'autre se caractérise par exemple par $T = 0$.

de ressources et x augmente. En vertu de (2.4), γ augmente aussi. Cependant, contrairement à l'intuition qui voudrait qu'une hausse du progrès technique accélère l'obsolescence des machines[10], *on observe que T augmente avec k*. L'augmentation de la recherche (en quantité et en efficacité) augmente la productivité marginale des facteurs, en particulier celle du capital, incitant à investir de manière plus capitalistique et donc à augmenter b. Ceci renchérit le coût de remplacement du capital et pousse en conséquence à retarder le déclassement des vieilles machines.

Les lignes 9 à 11 décrivent l'évolution du SCE quand le paramètre β varie. Si β augmente, $\varphi(x)$ se redresse, la productivité marginale de la recherche s'accroît, et donc x augmente. Mais β et x étant normalement inférieur à 1, si β augmente, $\varphi(x)$ baisse (à x fixé), avec par conséquent une efficacité de la recherche qui diminue. L'effet global est donc semblable à celui induit par une baisse de k (cfr. paragraphe précédent).

Les lignes 12 à 14 décrivent l'évolution du SCE quand le paramètre α varie. Comme l'indique (2.1), α (respectivement $1-\alpha$) est l'élasticité de la production au capital (respectivement au travail) relatif à une génération d'équipement avant son installation. Si α augmente, la productivité marginale du capital s'accroît, tandis que celle du travail diminue. Les investissements étant par conséquent plus capitalistiques ($\triangle b > 0$) d'une part, le taux de progrès technique sur le travail γ ayant baissé d'autre part (à cause de (2.4)), T augmente significativement.

En conclusion, il importe de rappeler que pour obtenir certains des résultats ci-dessus, il est essentiel de postuler que le progrès technique a un coût (celui de la recherche). Pour nous en convaincre, nous avons étudié une version légèrement simplifiée du présent modèle, où seule la direction du progrès technique est endogène, et non son rythme[11]. Dans ce dernier contexte, il apparaît notamment que la durée de vie d'un équipement demeure inversément proportionnelle au taux de progrès technique.

[10]Intuition que corroborent des résultats récents de Aghion et Howitt (1994), Boucekkine et al. (1997) et Germain et Magnus (1998).

[11]Cette version correspond en fait à un modèle putty-clay avec progrès technique exogène.

Bibliographie

Aghion P. et Howitt P. (1994) : ”Growth and unemployment”, *Review of Economic Studies*, 61, p. 477-494.

Boucekkine R., Germain M., Licandro O. et Magnus A. (1997), ”Creative destruction, investment volatility, and the average age of capital”, *Journal of Economic Growth*, 3, p.361-384.

de Mello L. (1995) : ”Vintage capital accumulation : endogenous growth conditions”, *Journal of Macroeconomics*, 17(4), p.703-716.

Germain M. et Magnus A. (1998) : ”De l’impact du progrès technique sur la croissance dans un modèle à générations de capital”, *Cahiers d’Economie Politique*, 32.

Kennedy C. (1964) : ”Induced bias in innovation and the theory of distribution”, *The Economic Journal*, 74, p. 541-547.

Nordhaus W. (1968) : *Innovation, growth and welfare*, MIT Press.

Samuelson P. (1965) : ”A theory of induced innovation along Kennedy-Weizsäcker lines”, *The Review of Economics and Statistics*, 47, p. 343-356.

Annexes

1. Maximum local. Puisque toute petite perturbation $\delta\iota(t)$, $\delta y(t)$ et $\delta x(t)$ sur $t \geq 0$ implique que l'intégrale de l'objectif (1.1) devient

$$\int_0^\infty u(c(t)+\delta c(t))e^{-\delta t}dt = \int_0^\infty u(c(t))e^{-\delta t}dt \quad + \\ \int_0^\infty u'(c(t))\delta c(t)e^{-\delta t}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty u''(c(t))\delta c(t)^2 e^{-\delta t}dt \tag{1.22}$$

où $\delta c(t)$ est la variation résultante sur $c(t)$, compte tenu des contraintes (1.2) à (1.6). Or les conditions du premier ordre (1.12) à (1.18) sont évidemment équivalentes à

$$\int_0^\infty u'(c(t))\delta c(t)e^{-\delta t}dt = 0 \tag{1.23}$$

pour toute variation $\delta c(t)$ admissible de $c(t)$. Et donc

$$\int_0^\infty u(c(t)+\delta c(t))e^{-\delta t}dt - \int_0^\infty u(c(t))e^{-\delta t}dt = \\ \frac{1}{2}\int_0^\infty u''(c(t))\delta c(t)^2 e^{-\delta t}dt < 0 \tag{1.24}$$

puisque u est concave.

2. Résolution numérique du système (2.4) à (2.7). L'idée est d'obtenir une équation en x seul. En substituant $b[x+e^{\gamma T}]$ dans (2.7) grâce à (2.5), on obtient

$$[\delta-\gamma\theta]\frac{1-e^{-\gamma T}}{\gamma} = \frac{\varphi'(x)}{\alpha}\frac{e^{\gamma T}-1-\gamma\frac{1-e^{[\gamma\theta-\delta]T}}{\gamma\theta-\delta}}{\delta+\gamma[1-\theta]} \tag{A.1}$$

En utilisant (2.6), (A.1) devient

$$\frac{\delta-\gamma\theta}{\gamma} = \frac{\varphi'(x)}{\alpha}\frac{e^{\gamma T}+[\gamma\theta-\delta]\frac{\alpha-1}{\varphi'(x)}-x}{\delta+\gamma[1-\theta]} \tag{A.2}$$

qui permet d'exprimer $e^{\gamma T}$ en fonction de x. Or (2.6) peut encore s'écrire

$$[\gamma\theta-\delta]\frac{\alpha-1}{\varphi'(x)}-x = \frac{\gamma}{1-e^{-\gamma T}}\frac{\left[e^{\gamma T}\right]^{\theta-\delta/\gamma}-1}{\gamma\theta-\delta} \tag{A.3}$$

En utilisant (A.2) pour remplacer $e^{\gamma T}$ dans (A.3), on obtient une équation en x seul.

Pour résoudre cette équation en x, nous avons utilisé une méthode de quasi-Newton : la méthode de la sécante. Il apparaît que pour des valeurs raisonnables de x, c'est-à-dire $0 < x < .5$ (pour mémoire, x peut être approximé au premier ordre par le rapport entre le nombre de chercheurs et le nombre d'ouvriers (cfr. note 4)), on n'a toujours trouvé qu'une seule solution pour l'équation (A.3).

3. Analyse analytique via approximation du système. L'idée est d'approximer les exponentielles apparaissant dans le système (2.4) à (2.7) par leurs développement en série de Taylor du premier ou deuxième ordre, sous l'hypothèse que leurs exposants ne sont pas "trop grands". Alors, ce système devient :

$$\varphi(x) = [1-\alpha]\gamma \tag{3.1}$$

$$b[1+x[1-\gamma T]] \approx \frac{\gamma T^2}{2} \tag{3.2}$$

$$[1-x]\varphi'(x) \approx [\delta-\theta\gamma][1-\alpha] \tag{3.3}$$

$$T \approx \frac{2[\delta-\theta\gamma]\alpha}{\gamma\varphi'(x)} \tag{3.4}$$

Combinant (3.1) et (3.3), on obtient une expression qui ne fait intervenir que x et les exogènes :

$$[1-x]\varphi'(x) + \theta\varphi(x) \approx \delta[1-\alpha] \tag{3.5}$$

Si $\varphi(x) = kx^\beta$, compte tenu des restrictions sur les paramètres ($0 < \beta < 1$, $\delta > 0$, $0 < \alpha < 1$), on vérifie aisément que si $\beta+\delta \geq 0$, $\partial x/\partial\delta$ est supérieur ou inférieur à 0 selon que x est supérieur ou inférieur à $[\beta+\delta]/[1-\beta]$, tandis que si $\beta+\delta < 0$, alors $\partial x/\partial\delta < 0$.

Combinant (3.3) et (3.4), on obtient une expression de T en fonction de x et des exogènes :

$$T \approx \frac{2\alpha[1+x]}{kx^\beta} \tag{3.6}$$

dT/dx se comporte comme $[1-\beta-\beta/x]/x^\beta$ et a l'allure ci-dessous.

Comme (3.1) implique à α constant que $d\gamma/dx > 0$, on observe qu'il est donc tout-à-fait possible d'avoir des variations
(i) en sens opposé de T et δ;
(ii) dans le même sens de T et γ si une exogène varie (en particulier δ).

Evolution de dT/dx en fonction de x