INSTITUT DE STATISTIQUE

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

DISCUSSION PAPER

0137

RISQUE DE LONGEVITE ET RENTES VIAGERES

I. Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours

NATACHA BROUHNS & MICHEL DENUIT

http://www.stat.ucl.ac.be

RISQUE DE LONGEVITE ET RENTES VIAGERES
I. Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours

NATACHA BROUHNS & MICHEL DENUIT
Institut de Statistique
Université Catholique de Louvain
Voie du Roman Pays, 20
B-1348 Louvain-la-Neuve
Belgium
brouhns@stat.ucl.ac.be & denuit@stat.ucl.ac.be

October 19, 2001

Résumé

Après avoir décrit le risque de longévité inhérent à un portefeuille de rentes viagères, nous examinerons l'évolution de la mortalité en Belgique, sur base des tables transversales couvrant la période allant de 1880 à 1999 publiées par l'Institut National de Statistique. Il sera clairement établi que la tarification des rentes viagères n'est possible que si l'actuaire dispose de tables de mortalité prospectives, dont l'établissement fera l'objet de la suite de notre travail.

Samenvatting

Na een beschrijving van het risico van levensduur gekoppeld met een portefeuille van lijfrentes gaan we ons bezighouden met de evolutie van de sterfte in België. Dit gebeurt op basis van de transversale tafels van het Nationaal Instituut voor de Statistiek (NIS) voor de jaren 1880 tot 1999. Er zal vastgesteld worden dat de tarificatie van lijfrentes enkel mogelijk is als de actuaris beschikt over prospectieve sterftetafels, die deel gaan uitmaken van het vervolg van ons werk.

Summary

After having described the longevity risk inherent to any life annuity portfolio, we examine mortality trends in Belgium, on the basis of statistics provided by the NIS, relating to the period 1880-1999. It will be clear that the pricing of life annuities requires projected life tables, that will be established in the subsequent parts of this work.

1 Introduction

1.1 Rentes viagères: pour qui? pourquoi?

Dans ce travail, nous nous intéressons à la tarification des rentes viagères[1]. Ce type de contrat garantit le versement régulier d'une somme d'argent à l'assuré, tant que celui-ci est vivant. Le plus souvent, il s'agit d'un complément de retraite, acheté par l'assuré dans le cadre du troisième pilier au moment où il cesse ses activités professionnelles (soit que le contrat prévoyait une sortie en rente, soit qu'il utilise des capitaux pour financer la rente) ou de pensions complémentaires relevant du deuxième pilier, ou encore des pensions légales dans le cadre du premier pilier.

Une fois retraités, la plupart des individus bénéficient d'une pension en vertu d'un régime obligatoire d'assurance vieillesse, pension dont le pouvoir d'achat est *grosso modo* garanti. Etant donné le niveau parfois modeste des pensions relevant du premier pilier, nombreux sont ceux qui désirent se constituer un complément de retraite, dans le cadre du deuxième ou du troisème pilier. A cet égard, la rente viagère est une formule parfaitement adaptée: le versement d'une annuité jusqu'au décès accroît en effet le bien-être en relâchant la contrainte que fait peser le risque viager sur les choix de consommation. Lors du départ à la retraite, les individus doivent donc réaliser un délicat arbitrage entre assurance contre le risque viager et transmission du patrimoine à leurs héritiers.

Il est toutefois important de signaler que l'allongement de la durée de la vie humaine et le recul de la solidarité nationale (sécurité sociale) et familiale tend à accroître le risque de dépense des retraités. En effet, les risques maladie et dépendance augmentent avec l'âge, ce qui devrait inciter les ménages à conserver des actifs liquides. Si le premier de ces risques est encore relativement bien assuré par la sécurité sociale (du moins le risque lourd), il en va tout autrement du second, dont la prise en charge est encore faible. Cet état de fait plaide en faveur du développement de produits spécifiquement adaptés aux besoins des seniors. On pourrait ainsi envisager de majorer les prestations en rente en cas de dépendance de l'assuré (afin de lui permettre de couvrir les frais d'une aide-soignante, par exemple). Bien entendu, la tarification de cette nouvelle génération de rentes requiert des outils adaptés, tels les processus ponctuels.

Le cadre de travail de la plupart des travaux analysant la demande de rentes viagères est le modèle simple de cycle de vie avec incertitude sur la date de décès développé par Yaari (1965). Ce modèle montre qu'en l'absence de motifs de transmission du capital aux héritiers et de sources d'incertitude autres que le risque viager, un individu risquophobe a intérêt à transformer la totalité de son capital en rente pour autant que celle-ci soit calculée de façon actuariellement neutre (ce qui suppose notamment l'absence d'antisélection et des coûts de gestion nuls). Dans le cas où l'individu valorise l'héritage, la composition optimale de son portefeuille entre annuités et actifs financiers est déterminée de manière à égaliser à chaque instant l'utilité marginale de sa consommation et l'utilité marginale de l'héritage.

A l'heure actuelle en Belgique, il ne fait aucun doute que la formule de la rente attire une part trop faible du public. Beaucoup de nos concitoyens restent en effet attachés à une liquidation en capital, principalement par habitude, et parce que trop peu de gens comprennent les mécanismes de l'assurance vie (cette méconnaissance se traduisant par une méfiance envers ces produits). Comme pour les contrats d'assurance-vie individuelle ou les contrats d'épargne-pension auxquels s'applique une taxe anticipative, le choix de la liquiditation sous forme de rente ou de capital est fiscalement neutre, on pourrait assister à une progression des rentes. De plus, la rente viagère, la seule formule à procurer une réelle protection contre le risque de longévité, devrait selon nous être davantage encouragée par les pouvoirs publics dans le cadre de l'épargne à long terme.

[1] Seule la rente simple est envisagée; pour des détails à propos de la rente avec réversion, référez-vous par exemple à Denuit & Cornet (1999).

1.2 Bases techniques

Comme pour tout autre produit d'assurance sur la vie, la détermination du montant de la prime pure relative à une rente viagère se fait sur base du principe d'équivalence, en vertu duquel l'espérance de la valeur actuelle des prestations de l'assureur doit être égale à l'espérance de la valeur actuelle des primes pures payées par l'assuré. A la prime pure ainsi obtenue, l'assureur ajoute divers chargements (de sécurité, pour frais de gestion, d'émission, etc.) pour obtenir la prime tarifaire.

Les bases techniques du contrat d'assurance sur la vie classique sont au nombre de trois: le taux d'intérêt technique permettant d'actualiser les flux financiers générés par le contrat (à fixer avec prudence car il est garanti pour toute la durée du contrat), une loi de survenance des décès (décrite par une table de mortalité) permettant d'évaluer le coût moyen des contrats souscrits par la compagnie, et les montants des divers chargements qui viendront grever la prime pure. Nous limiterons ici notre propos à la table de mortalité: nous verrons qu'un soin tout particulier doit être apporté à cette composante du tarif lorsqu'on s'intéresse aux rentes viagères.

En Belgique, les assureurs sont tenus de se conformer à un tarif minimum qui se déduit en ce qui concerne les rentes viagères des tables de mortalité officielles MR et FR (pour les hommes et les femmes, respectivement). Les tables de mortalité officielles imposées par les autorités de contrôle afin de limiter les tarifs pratiqués par les compagnies d'assurance, celles-ci sont loin de décrire fidèlement la mortalité des assurés. Le principal souci du législateur est surtout d'imposer aux acteurs du marché des bases techniques suffisamment prudentes que pour préserver les assurés de toute insolvabilité des compagnies. Malheureusement, les écarts sensibles constatés entre la mortalité d'expérience et celle décrite par les tables de mortalité officielles ne sont pas toujours synonymes de sécurité pour les assurés. Pour une analyse de la situation belge, voyez par exemple Denuit (1999).

1.3 Tables transversales: une imposture?

Traditionnellement, les actuaires fondent le calcul des primes d'assurance sur des tables de mortalité transversales (du moins en ce qui concerne le tarif d'expérience). De telles tables sont dressées à partir d'observations relatives à une période déterminée (typiquement 1 à 3 ans). Cette manière de procéder n'est pas sans inconvénient lorsque la mortalité évolue. En effet, supposons que l'actuaire utilise les probabilités annuelles de décès (ou quotients de mortalité) obtenus à partir d'une année d'observation de son portefeuille. Dans ce cas, les assurés d'âge x serviront à estimer la probabilité q_x de décéder dans l'année pour un individu ayant atteint cet âge. Les estimations $\widehat{q}_x$ des q_x serviront à calculer les primes des différents produits d'assurance commercialisés par la compagnie.

Cette approche pragmatique se heurte cependant à un obstacle majeur: les primes ainsi calculées ne reflèteront le risque réel d'aucun assuré du portefeuille (sauf dans l'hypothèse peu probable où la mortalité n'évoluerait plus). En effet, chacun des $\widehat{q}_x$ a été obtenu à l'aide d'une génération différente d'assurés. En d'autres termes, s'il faut calculer la prime à payer par un assuré âgé de x_0 années à la souscription du contrat, $\widehat{q}_{x_0}$ sera obtenu à partir des individus ayant cet âge dans le portefeuille (donc faisant partie de la même génération que le nouvel assuré), $\widehat{q}_{x_0+1}$ à partir de ceux âgés de x_0+1 années (donc de la génération précédant d'un an celle du nouvel assuré), $\widehat{q}_{x_0+2}$ à partir de ceux âgés de x_0+2 années, etc. Or, comme les médias se plaisent à nous le répéter, nous "gagnons une saison tous les ans". Il y a donc fort à parier que la probabilité de décès qu'il faudrait appliquer pour tarifer la police du nouvel assuré soit inférieure à $\widehat{q}_{x_0+1}$ à l'âge x_0+1, inférieure à $\widehat{q}_{x_0+2}$ à l'âge x_0+2, et ainsi de suite. Dès lors, l'approche transversale ne décrit la mortalité d'aucun assuré du portefeuille, et semble dangereuse lorsqu'il s'agit de tarifer les opérations en cas de vie.

1.4 Risque de longévité

Ainsi, en marge du risque technique inhérent aux rentes viagères et maîtrisé par les mécanismes de compensation, et du risque financier généré par la garantie du taux d'intérêt technique durant toute la durée du contrat, naît un nouveau risque résultant de l'évolution inconnue de la mortalité dans le futur. Ce nouveau risque est appelé risque de longévité et sera d'autant plus important que le rythme d'allongement de la durée de la vie humaine est élevé.

Le risque de longévité a été considéré par MAROCCO & PITACCO (1998), qui ont proposé des traités de réassurance spécifique pour s'en prémunir. OLIVIERI & PITACCO (1999) ont examiné l'impact du risque de longévité sur l'assurance soins de santé souscrite par les pensionnés. Le risque de longévité en rapport avec un portefeuille de rentes viagères a été considéré par OLIVIERI (1999) et OLIVIERI & PITACCO (2000,2001), en ce compris le calcul des marges de solvabilité. Enfin, COPPOLA, DI LORENZO & SIBILLO (2000) ont analysé conjointement les risques financiers et démographiques. Une bonne présentation de la problématique est fournie par PITACCO (2001). On ne peut cependant que déplorer que toutes ces études considèrent le problème sous l'angle probabiliste, sans jamais aborder le délicat problème de l'estimation des paramètres intervenant dans les modèles qu'ils utilisent.

1.5 Tables de mortalité prospectives

Les actuaires ont répondu au risque de longévité par la construction de tables de mortalité prospectives, leur permettant d'établir un tarif et de calculer les réserves relatives aux rentes viagères intervenant dans les secteurs privé et public. De telles tables ont deux entrées: l'âge de l'assuré et l'année calendaire. Elles donnent pour chaque âge la probabilité de décéder au cours d'une certaine année. Elles sont dressées à partir de modèles statistiques estimant les tendances de la mortalité, et les extrapolant dans le futur. Il va sans dire que de telles tables doivent être fréquemment revues, à la lumière des nouvelles statistiques de mortalité que l'actuaire peut se procurer.

Pour de plus amples informations sur les règles en vigueur dans les différents pays de l'Union, nous renvoyons le lecteur par exemple à MCDONALD (1997). Il existe de nombreuses techniques de projection de la mortalité; mentionnons celles proposées par BENJAMIN & POLLARD (1993), BENJAMIN & SOLIMAN (1993), AESS (1995), CONTINUOUS MORTALITY INVESTIGATION REPORT (1990, 1999), RENSHAW & HABERMAN (1996,2001), WANG & BROWN (1998), LAMBRECHTS (2000) SITHOLE, HABERMAN & VERALL (2000), LEE (2000), GOCKEL (2000), JAUMAIN (2001) et LOUIS (2001), de même que les références contenues dans ces travaux.

1.6 Autres utilisations des rentes viagères

Notez également que des rentes sont utilisées dans de nombreux autres secteurs de la société. On notera par exemple les rentes réparant un dommage corporel en droit commun, les ventes d'immeubles contre rente viagère, le calcul de la valeur de conversion d'un usufruit ou, de façon plus anecdotique, les jeux de hasard dont le gros lot est une rente viagère ("Win for Life" de la Loterie Nationale par exemple). Dans un ouvrage fort intéressant, SCHRYVERS (2000) plaide en faveur de l'utilisation de tables mortalité récentes lors de la capitalisation des dommages corporels des victimes d'accidents de droit commun, et ce afin de ne pas les désavantager[2]. En page 8, l'auteur souligne l'intérêt des tables de mortalité prospectives pour l'évaluation d'une

[2]Notez que tout comme cet auteur, nous sommes persuadés que le système même de la capitalisation de tels dommages est profondément inique, faisant peser sur les victimes tous les risques financiers et viagers. Il serait beaucoup plus équitables que les individus reconnus responsables s'acquittent d'une prime unique d'assurance auprès d'une compagnie privée ou publique, laquelle se chargerait de verser les mensualités aux victimes.

vie moyenne en droit commun[3].

1.7 Plan de l'étude

Notre étude est divisée en trois volets. Dans le premier de ceux-ci, nous décelons les grandes tendances de l'évolution de la mortalité en Belgique, telle qu'elles se dégagent des tables de mortalité transversales (ou du moment) dressées par l'INS et relatives aux périodes 1880-90, 1928-32, 1946-49, 1959-63, 1968-72, 1979-82, 1988-90, 1991-93, 1994-1996 et 1997-1999. Notez qu'il ne s'agit pas de la première analyse de ces tendances; le lecteur intéressé pourra par exemple consulter Jaumain (2001).

Cette analyse transversale de la mortalité ne tient pas compte du parcours longitudinal des individus dans le diagramme de Lexis. Il est dès lors important de souligner que tous les indicateurs démographiques et actuariels que nous calculerons dans cette première partie de l'étude n'ont aucun sens concret. Ainsi, l'espérance de vie à la naissance calculée sur base d'une table du moment est égale à la durée de vie moyenne d'une génération fictive qui aurait, tout au long de son existence les conditions de mortalité par âge de la période considérée. Dans une période d'allongement de la durée de la vie humaine, les espérances de vie calculées sur base des tables transversales sous-estiment systématiquement la durée de vie moyenne de la génération née cette année-là. Une génération de naissance n'est en effet pas soumise, durant l'ensemble de son vécu, à la mortalité mesurée à la date de sa naissance, mais profite en fait des progrès accomplis au cours de sa vie. Pour plus de détails concernant les visions transversales et longitudinales, le lecteur consultera Vallin (1973) pour la France, et Menthonnex & Wanner (1998) pour la Suisse.

Dans la deuxième partie de notre étude, nous établirons des tables de mortalité prospectives pour la population belge à partir des données démographiques publiées par l'INS et couvrant la période 1960-1998. Il faut souligner ici que la relativement courte période d'observation n'autorisera pas des prévisions à très long terme. Des techniques permettant d'homogénéiser les statistiques INS d'avant et après 1960 sont examinées pour l'instant par les auteurs. Une fois au point, elles permettront de travailler avec des historiques beaucoup plus longs et, partant, de réaliser des projections à plus long terme. Ceci fera l'objet d'une publication ultérieure.

Enfin, dans la troisième partie du travail, nous traiterons du phénomène d'antisélection, qui ne peut être négligé pour les rentes viagères. Nous quantifierons l'impact financier de l'antisélection grâce aux données "marché" recueillies par l'Office de Contrôle des Assurances (OCA). Ensuite, nous adapterons les projections obtenues sur base des données INS (donc relatives à la population belge dans son ensemble) à la réalité de la population assurée. Ceci nous permettra finalement de proposer des bases d'expérience aux assureurs désireux de commercialiser des rentes viagères.

1.8 Pour terminer...

Pour terminer cette introduction, il convient d'insister sur le fait que nous nous intéressons exclusivement à l'évolution de la mortalité future. Il ne s'agit donc pas de projections de la population, comme on peut en trouver dans Lambrecht (1997) ou INS, BFP et Communauté Scientifique (1996), par exemple. Une telle projection est un exercice beaucoup plus ambitieux combinant différents scénarios quant à l'évolution future des taux de natalité, de mortalité et des mouvements migratoires. De plus, notre pragmatisme d'actuaire fait que nous ne tentons pas d'expliquer les changements observés dans la mortalité. Nous nous bornerons à les constater et à les extrapoler dans le futur.

[3]Néanmoins, la note 20 en bas de page 9 repose sur une interprétation erronnée des tables prospectives, qui ont deux entrées, l'âge de l'assuré et l'année civile, comme nous le verrons dans la deuxième partie de notre étude.

Dans tout le travail, nous avons posé l'hypothèse que les migrations n'interfèrent pas avec la mortalité, c'est-à-dire que les personnes qui arrivent en Belgique ou qui quittent notre pays ne sont pas exposées à des risques de décès différents de celles qui demeurent dans le Royaume. Remarquons que ces migrations concernent essentiellement des personnes qui, en raison de leur âge, sont exposées à un faible niveau de mortalité. Elles ne devraient donc pas jouer un rôle perturbateur important.

Afin de rendre notre étude accessible à tous (notamment aux lecteurs qui ne seraient pas familiers avec les outils de base de démographie mathématique), tous les concepts et notations utilisés sont soigneusement introduits. Pour plus de détails sur les aspects démographiques de l'étude de la mortalité, on pourra utilement se référer à Chiang (1984), Keyfitz (1985), Leridon & Toulemon (1997) ou encore Vandenschrick (1995).

2 Tables de mortalité

2.1 Concept

La table de mortalité est un modèle qui permet de rendre compte de la mortalité vécue par une cohorte d'individus nés tous la même année), depuis la naissance jusqu'à l'extinction complète de la génération. La cohorte est en outre supposée fermée à la migration.

Les premières tables de mortalité furent dressées dès le 17ème siècle. C'est dire si cette matière a une longue histoire derrière elle. Les démographes s'accordent généralement à voir dans l'ouvrage d'un mercier londonien, John Graunt, intitulé *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality* et publié en 1662, la première contribution à l'établissement des tables de mortalité. Il s'agit d'une analyse des relevés hebdomadaires des décès pour la ville de Londres.

La question de la mesure de la mortalité, considérée par Graunt, va susciter un grand intérêt par la suite en raison de la généralisation des produits d'assurance sur la vie, rentes viagères et tontines, et de façon plus théorique, parce que la mortalité constituait un bon exemple de la notion de probabilité que les mathématiciens commençaient à développer.

La table de mortalité donne à chaque âge le nombre moyen de décès, de survivants, les probabilités de décès et de survie pour une génération fictive correspondant conventionnellement à 100 000 ou 1 000 000 de naissances (racine de la table). Le recours à cette génération fictive s'explique par le fait que les nombres de décès par âge observés une année donnée sont relatifs à différentes générations, dont les nombres de survivants en début d'année sont le résultat de circonstances du passé: non seulement de la mortalité passée, mais aussi des fluctuations du nombre de naissances (toutes ces générations n'avaient pas les mêmes effectifs initiaux) et des migrations (qui peuvent avoir fait varier, dans un sens ou dans l'autre, l'effectif des générations). Si l'on veut étudier les conditions de mortalité du moment, il faut donc faire abstraction de ces circonstances du passé. C'est pourquoi on calcule le nombre de survivants et de décès par âge dans une génération fictive dont l'effectif initial est connu et dont les variations d'effectif en fonction de l'âge sont le seul résultat de la mortalité telle qu'observée au moment étudié.

2.2 Durée de vie restante

La variable aléatoire positive T représente la durée de vie d'un individu de la population de référence. On définit une suite de variables aléatoires $\{T_x,\ x = 0, 1, 2, \dots\}$, où T_x est la durée de vie restante d'un individu ayant atteint l'âge x, i.e.

$$T_x =_d [T - x | T > x]$$

où $=_d$ signifie “a même loi que” et où $[X|A]$ désigne une variable aléatoire dont la loi de probabilité est décrite par $\Pr[X \in B|A]$, quels que soient A et $B \in \mathbb{B}$. Ainsi, la personne vivante à l'âge x décèdera à l'âge $x + T_x$.

2.3 Quotients de mortalité

On introduit alors les probabilités de survie ${}_tp_x$ et de décès ${}_tq_x$ définies par

$$ {}_tp_x = \Pr[T_x > t] = \Pr[T > x + t | T > x] $$

et

$$ {}_tq_x = 1 - {}_tp_x = \Pr[T_x \leq t] = \Pr[T \leq x + t | T > x]. $$

Comme les actuaires en ont l'habitude, on omet l'indice t lorsque celui vaut 1, i.e. ${}_1q_x \equiv q_x$ et ${}_1p_x \equiv p_x$. On a bien entendu ${}_0q_x \equiv 0$ et ${}_0p_x \equiv 1$.

2.3.1 Fonction de survie

La fonction de survie $x \mapsto \ell_x$ décrit le nombre moyen de survivants d'une cohorte de ℓ_0 individus tous nés à une même date. Clairement, cette fonction est non-croissante. Nous la supposerons de plus continûment différentiable.

Théoriquement, partant d'un nombre ℓ_0 de nouveaux-nés, ℓ_x est le nombre moyen de survivants à l'âge x. La différence $\ell_x - \ell_{x+1}$ est le nombre de décès observés parmi les ℓ_x individus âgés de x années; ce nombre est noté d_x. Dans ce formalisme, on a bien évidemment

$$ {}_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}. $$

Si on note ${}_td_x = \ell_x - \ell_{x+t}$ le nombre d'individus décédant entre x et $x + t$, il vient encore

$$ {}_tq_x = \frac{{}_td_x}{\ell_x}; $$

${}_tq_x$ est appelé quotient de mortalité en démographie (car il apparaît comme le rapport entre le nombre de décédés sur l'intervalle $(x, x + t)$ et le nombre d'individus vivants en début de période). Les actuaires parlent plus volontiers de probabilité de décès entre les âges x et $x + t$, pour un individu d'âge x.

2.4 Temps vécu

L'analyse statistique des décès observés au sein d'une cohorte utilise la variable personne-année pour mesurer le temps vécu par tout groupe d'individus de la cohorte dans un intervalle d'âge donné. Le nombre d'années vécues par les individus entre l'âge x et l'âge $x + t$ est donné par

$$ {}_tL_x = \int_{\xi=0}^{t} \ell_{x+\xi} d\xi. $$

Comme à l'accoutumée, on omet l'indice t lorsque celui-ci vaut 1, de sorte que L_x est le nombre d'années vécues par les individus entre les âges x et $x + 1$.

2.5 Temps restant à vivre

Le temps restant à vivre aux survivants de la cohorte au-delà de l'âge x est une autre grandeur caractéristique de la table de mortalité; elle est notée $L_{x\bullet}$. Elle représente le nombre de personnes-années pour la cohorte depuis l'âge x jusqu'à l'extinction complète et est donnée par

$$L_{x\bullet} = \int_{\xi=x}^{+\infty} \ell_\xi d\xi = \int_{\xi=0}^{+\infty} \ell_{x+\xi} d\xi = \sum_{k=x}^{+\infty} L_k.$$

2.6 Taux de mortalité

Le taux de mortalité sur $(x, x+t)$ diffère du quotient en ce que le nombre de décès est ramené à un effectif moyen, au lieu de l'effectif initial. Le taux de mortalité sur $(x, x+t)$, noté ${}_tm_x$, est donné par

$${}_tm_x = \frac{{}_td_x}{{}_tL_x}.$$

Le taux ${}_tm_x$ s'exprime en nombre de décès par personne et par an. Il est parfois appelé taux central de mortalité. A nouveau, ${}_1m_x \equiv m_x$.

Alors que les quotients de mortalité sont des probabilités (nombres sans dimension toujours compris entre 0 et 1, quelle que soit la longueur de l'intervalle considéré), les taux sont mesurés dans l'unité inverse du temps, et comptabilisent des décès par personne exposée au risque et par unité de temps.

2.7 Taux instantané de mortalité

Le taux instantané de mortalité à l'âge $x+t$ (parfois aussi appelé force de mortalité, traduction littérale de l'anglais), noté μ_{x+t}, est défini à partir de la limite suivante:

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{\Pr[t < T_x \leq t + \Delta t | T_x > t]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{{}_{t+\Delta t}q_x - {}_tq_x}{{}_tp_x \Delta t} = \frac{1}{{}_tp_x} \frac{\partial}{\partial t} {}_tq_x \end{aligned} \tag{1}$$

de sorte que par un développement de Taylor limité à l'ordre 1, on obtient les relations

$${}_{\Delta t}q_x = {}_0q_x + \left[{}_tp_x \mu_{x+t}\right]_{t=0} \Delta t + o(\Delta t) = \mu_x \Delta t + o(\Delta t) \tag{2}$$

et

$${}_{\Delta t}p_x = {}_0p_x - \left[{}_tp_x \mu_{x+t}\right]_{t=0} \Delta t + o(\Delta t) = 1 - \mu_x \Delta t + o(\Delta t) \tag{3}$$

où la notation $o(t)$ (à lire "petit o de t") désigne une fonction quelconque telle que

$$\lim_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = 0;$$

$o(t)$ est donc une fonction tendant plus vite vers 0 que l'identité. Intuitivement, il faut considérer $o(t)$ comme une quantité négligeable lorsque t est suffisamment petit, de sorte que les approximations ${}_{\Delta t}q_x \approx \mu_x \Delta t$ et ${}_{\Delta t}p_x \approx 1 - \mu_x \Delta t$ sont valables pour Δt suffisamment petit.

Le taux instantané de mortalité peut encore s'obtenir comme suit à partir des taux de mortalité. Partant de

$${}_{\Delta t}m_x = \frac{{}_{\Delta t}d_x}{{}_{\Delta t}L_x} = \frac{\ell_x - \ell_{x+\Delta t}}{\int_{\xi=0}^{\Delta t} \ell_{x+\xi} d\xi}$$

on obtient en passant à la limite

$$\lim_{\Delta t \to 0} {}_{\Delta t}m_x = -\frac{\frac{d}{dx}\ell_x}{\ell_x} = \mu_x$$

car

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\xi=0}^{\Delta t} \ell_{x+\xi} d\xi = \ell_x.$$

Ceci justifie donc bien l'appellation de taux instantané de mortalité pour μ_x.

Si on voit T_x comme une variable aléatoire continue, il est aisé d'obtenir sa densité de probabilité, donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_t q_x = {}_t p_x \mu_{x+t} \Leftrightarrow {}_t q_x = \int_{\xi=0}^{t} {}_\xi p_x \mu_{x+\xi} d\xi.$$

On peut également obtenir les probabilités de survie en fonction des taux instantanés de mortalité de la manière suivante. Partant de (1), on voit facilement que

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln {}_t p_x = -\mu_{x+t};$$

si nous considérons cette dernière relation comme une équation différentielle en la fonction $t \mapsto {}_t p_x$, à x fixé, on obtient la solution

$${}_t p_x = \exp\left(- \int_{\xi=0}^{t} \mu_{x+\xi} d\xi \right)$$

grâce à la condition initiale ${}_0 p_x = 1$.

2.8 Le diagramme de Lexis

Le temps intervient sous trois formes différentes dans l'étude de la mortalité: l'âge des individus, l'instant d'observation et la génération dont les individus font partie. Expliquons brièvement comment ces trois aspects influencent la mortalité. L'âge tout d'abord: il est évident que l'âge d'un individu influence le risque décès. L'instant d'observation ensuite: le risque de mourir à un âge donné pourra varier d'une année à l'autre au gré de circonstances telles qu'une épidémie, une guerre, un hiver particulièrement rude, ou un été torride. On parle d'effet de période. Enfin, le risque de mourir à un âge donné peut aussi se modifier indépendamment d'un effet de moment, selon le passé des individus concernés. Supposons par exemple que nous désirions comparer la mortalité à 5 ans en Belgique à 5 ans d'intervalle (en 2000 et en 2005). Les individus concernés sont nés soit en 1995, soit en 2000, et relèvent donc de deux générations différentes, celle de 1995, et celle de 2000. Supposons qu'en 1995, une grave épidémie ait frappé les nourrissons belges et décimé cette génération. A l'inverse, la génération 2000 n'a pas eu à souffrir d'une telle calamité. Supposons en outre qu'entre 2000 et 2005, les conditions de vie (niveau de vie, moyens sanitaires, hygiène, etc.) soient restées identiques. Il se pourrait fort bien que le risque de mourir à 5 ans soit plus faible en 2000 qu'en 2005. En effet, l'épidémie de 1995 pourrait avoir opéré une sélection importante ayant pour conséquence que seuls les enfants les plus robustes aient survécu. Le risque de décès diffère ici suite à un effet de génération.

On dispose ainsi de trois coordonnées pour repérer un événement tel que le décès d'un individu:

1. la date à laquelle il se produit

2. l'âge de l'individu concerné par l'événement

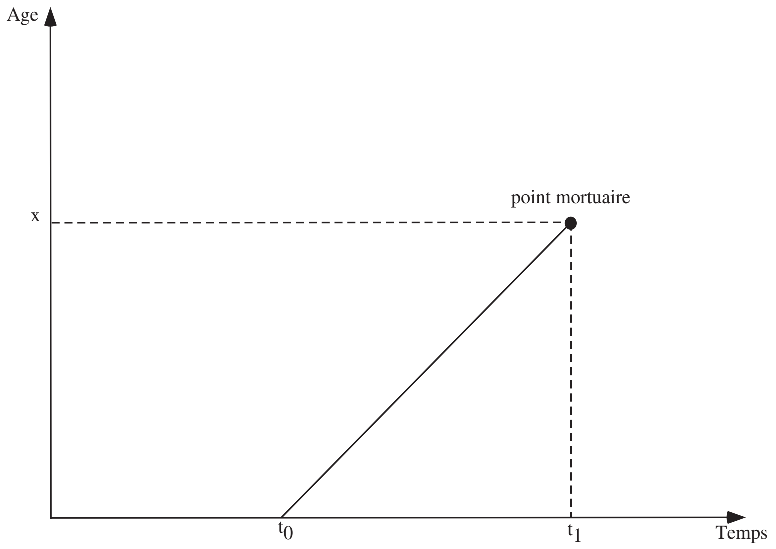

Figure 1: *Parcours d'un individu dans le diagramme de Lexis.*

3. le moment de naissance de l'individu concerné par l'événement.

Ces trois données sont évidemment redondantes: seules deux d'entre elles sont en fait nécessaires pour repérer l'événement. Néanmoins, les trois deviennent indispensables lorsqu'on s'intéresse à un groupe d'individus, comme nous le verrons plus loin. Le diagramme de Lexis permet le repérage de faits démographiques en fonction des trois coordonnées date-âge-génération. Il privilégie en fait les coordonnées "âge" et "date", qui se voient chacune attribuer un axe.

Le diagramme de Lexis est un système d'axes rectangulaires permettant de préciser comment se combinent les mesures de temps, selon le calendrier civil et selon la durée écoulée depuis un événement antérieur. Les dates du calendrier sont portées en abscisse, les durées écoulées figurent en ordonnées, l'échelle de mesure du temps étant la même. S'agissant de la mortalité, la durée prise en compte est l'âge, durée écoulée entre le décès et l'événement antérieur qu'est la naissance. Dans un tel système d'axes, le déroulement de l'existence d'un individu est figuré par une ligne de vie, parallèle à la première bissectrice (l'âge de l'individu augmente d'une année pour chaque année qui passe) interrompue lors du décès en un point, appelé le point mortuaire. Nous avons représenté à la Figure 1 le parcours d'un individu dans le diagramme de Lexis: celui-ci est né à la date t_0, et décédé à la date t_1 à l'âge x. Clairement, $x = t_1 - t_0$.

L'âge peut faire l'objet d'une mesure exacte, ou être exprimé plus approximativement, mais plus commodément en années révolues. L'âge en années révolues est exprimé par la valeur du nombre entier d'années au dernier anniversaire. L'âge exact au 31 juillet 1992 d'un individu né le 30 juin 1991 est d'un an et un mois; son âge en années révolues, à la même date, est d'un an.

Bien entendu, on ne s'intéresse pas à un individu en particulier, mais à des cohortes d'individus. Le diagramme de Lexis comporte, outre le quadrillage formé par les droites parallèles aux axes rectangulaires, les diagonales limitant les lignes de vie des personnes nées au cours d'une même année (ensemble appelé génération). Il suffit d'indiquer sur le diagramme de Lexis

1. l'effectif de la génération, aux intersections avec les axes verticaux (effectifs aux premiers janvier successifs, date à laquelle tous les individus ont le même âge en années révolues) ou horizontaux (effectifs aux anniversaires successifs);

2. le nombre de décès localisés dans les surfaces délimitées par le système.

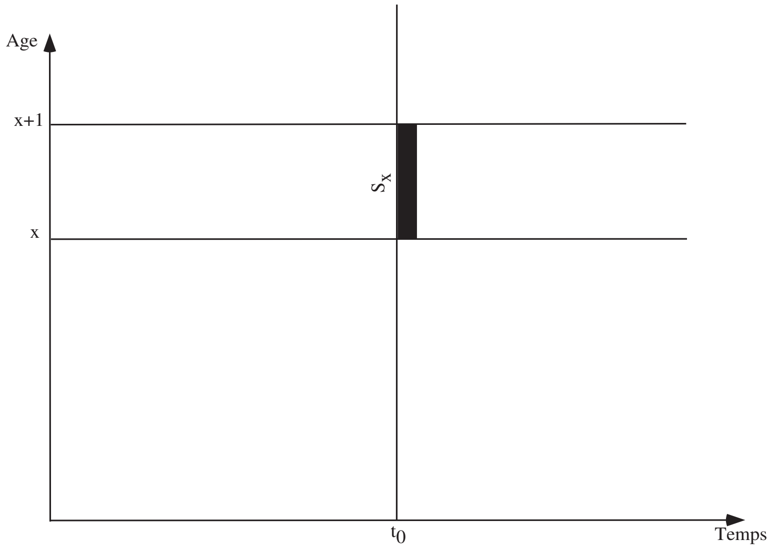

Figure 2: *Nombre de survivants d'âge x à une date donnée t_0.*

Lors d'un recensement, on note l'âge des individus à un moment précis. Les résultats publiés nous apprennent l'effectif correspondant à chaque âge révolu, c'est-à-dire le nombre d'individus ayant atteint l'âge considéré à l'instant du recensement. La localisation de cet effectif s'obtient en faisant l'intersection entre la verticale correspondant à la date du recensement et le couloir horizontal correspondant à l'âge révolu. Ainsi, si à l'instant t_0 du recensement, S_x individus avaient x années révolues, on note ce nombre verticalement sur le segment en question, comme décrit à la Figure 2. Cette information se traduit comme suit: S_x lignes de vie ont au moins traversé ce segment.

Une autre information est de savoir qu'au cours de l'année t, S_x individus ont fêté leur $x$ième anniversaire. Ce nombre S_x est à placer sur le segment à l'intersection entre l'horizontale correspondant à l'âge x et le couloir vertical correspondant à l'année t. Cela signifie que S_x lignes de vie ont au moins atteint ce segment. Voyez la Figure 3. Notez que tous ces individus appartiennent à la génération $t - x$. Ces nombres S_x ne sont pas directement fournis par l'INS, mais peuvent se déduire d'autres statistiques publiées par l'Institut (du moins si on se satisfait de l'hypothèse d'une population fermée).

Pendant l'année t, on a relevé d_x décès parmi les individus de x années révolues. Ces décès sont à localiser dans un carré, intersection entre un couloir vertical (celui de l'année t) et un couloir horizontal (celui de l'âge x). Cela signifie que d_x lignes de vie se sont terminées par un décès dans ce carré. Voyez la Figure 4. Notez que ces d_x individus décédés appartenaient à deux générations: $t - x$ et $t - x - 1$.

On peut aussi relever le nombre de décès à l'âge x dans une génération g. Ces décès sont à localiser dans un parallélogramme, intersection entre un couloir oblique (correspondant à la génération g) et un couloir horizontal (correspondant à l'âge x). Voyez la Figure 5. Notez que ces décès se sont produits au cours de deux années différentes: $g + x$ et $g + x + 1$.

Enfin, si on s'intéresse au nombre de décès d'une année au sein d'une génération, ces décès sont à localiser dans un parallélogramme, intersection entre un couloir oblique (la génération g) et un couloir vertical (l'année t). Voyez la Figure 6. Ces décès se sont produits à deux âges différents: $t - g$ et $t - g - 1$.

En ce qui concerne les données INS, les décès sont classés selon la génération, l'âge révolu et l'année. Dans ce cas, les décès sont à localiser dans un triangle qui est à l'intersection d'un couloir horizontal correspondant à l'âge, d'un couloir vertical correspondnant à l'année et d'un

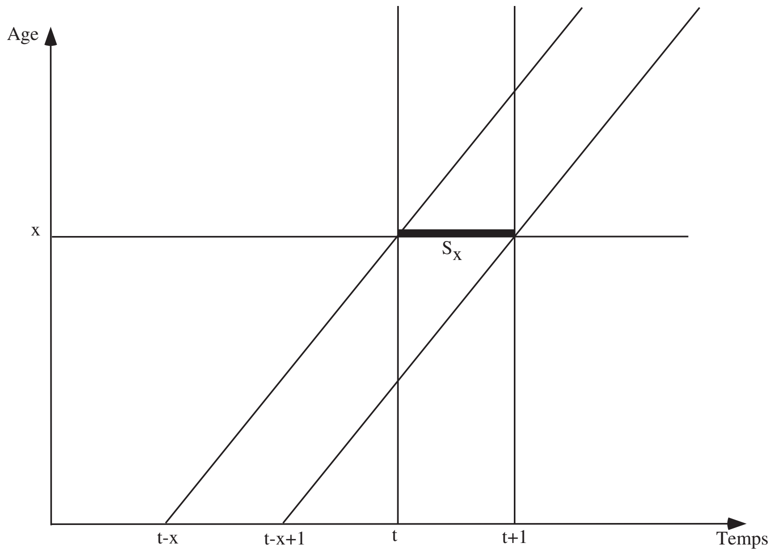

Figure 3: *Nombre de survivants à l'âge x au sein d'une génération donnée.*

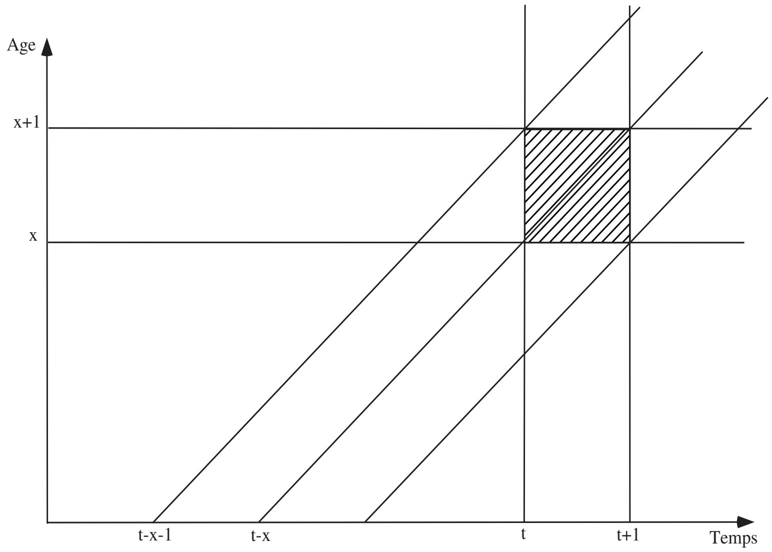

Figure 4: *Nombre de décès à l'âge x durant l'année t.*

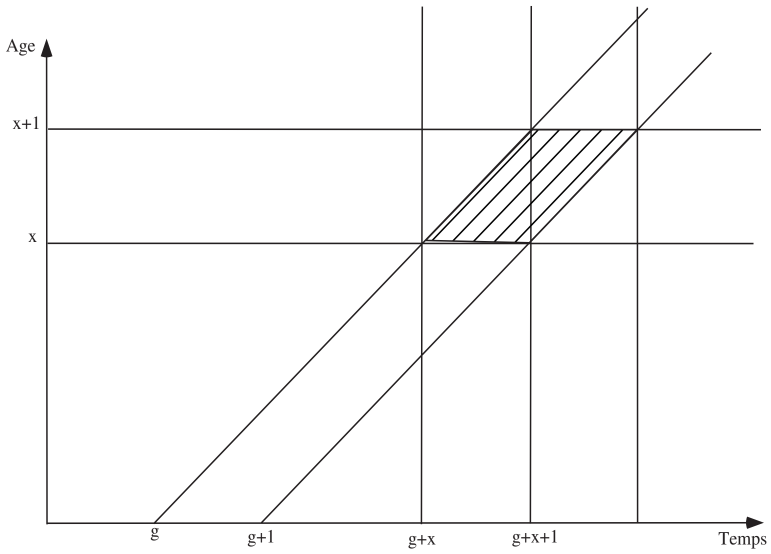

Figure 5: *Nombre de décès à l'âge x parmi les individus de la génération g.*

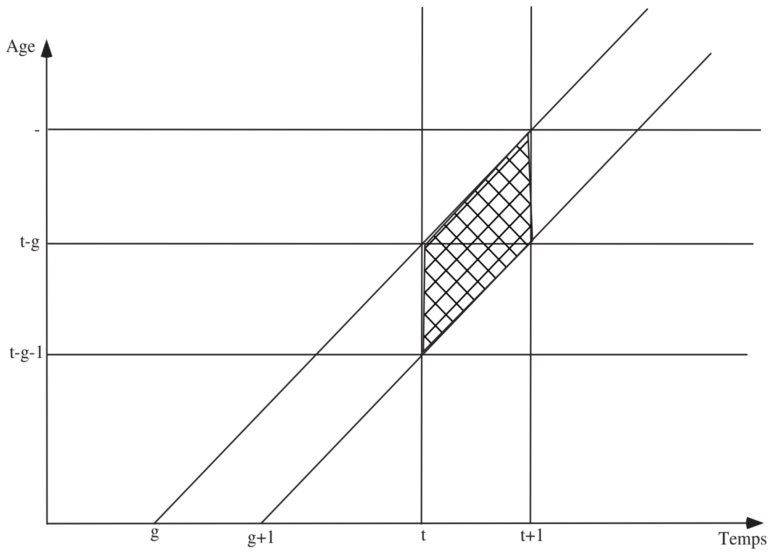

Figure 6: *Nombre de décès parmi les individus de la génération g au cours de l'année t.*

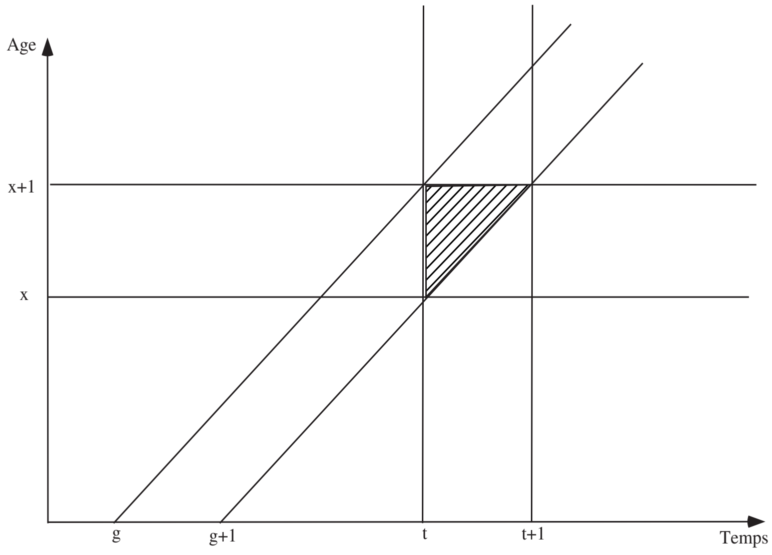

Figure 7: *Nombre de décès à l'âge x au cours de l'année t parmi les individus de la génération g.*

couloir oblique correspondant à la génération. On peut voir à la Figure 7 le nombre de décès relatifs à la génération g, à l'âge x durant l'année t. Cette description est la plus complète qui soit, puisqu'elle permet de reconstituer les effectifs des carrés et parallélogrammes des Figures 4 à 6. Elle nécessite l'usage simultané des trois coordonnées de temps, alors que le repérage d'une seule ligne de vie ne nécessite que deux coordonnées de temps pour être localisée.

2.9 Approches longitudinale et transversale

Une approche classique consisterait à observer les âges au décès d'un grand nombre de nouveau-nés; la proportion d'entre eux toujours vivant à l'âge t fournirait une estimation de la probabilité ${}_tp_0$ pour un nouveau-né d'atteindre l'âge t, dont il serait aisé de déduire une estimation des probabilités ${}_tp_x$ pour un individu d'âge x de survivre jusqu'à l'âge $x+t$ grâce à la relation

$$ {}_{x+t}p_0 = {}_xp_0 \times {}_tp_x \Leftrightarrow {}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0}. $$

L'estimation de la fonction de survie $t \mapsto {}_tp_0$ de la durée de vie T d'un individu de la population qui est ainsi obtenue est une fonction "en escaliers", qu'il suffirait de "lisser" afin de disposer des statistiques de mortalité nécessaires à la tarification en assurance sur la vie. Cette approche standard est cependant vouée à l'échec, puisqu'il faudrait plus d'un siècle (le temps nécessaire pour que la plupart des nouveaux-nés participant à l'étude décèdent) pour accomplir cette tâche, de sorte que la table de mortalité obtenue serait périmée dès sa réalisation. Dès lors, le plan d'expérience adopté pour dresser des tables de mortalité consistera à observer les décès sur une ou plusieurs années (typiquement 1 à 4 ans) et à baser les estimations sur ces données. Ceci a pour conséquence que nous "mélangeons" des individus nés au cours de différentes années calendrier, et qui auront donc vraisemblablement des durées de vie différentes (en raison de l'évolution de la mortalité ou de phénomènes propres à la génération considérée).

Afin de bien comprendre les différences entre les approches longitudinales et transversales, considérons la Figure 8. Notons $q_x^{\text{long}}(t)$ le quotient de mortalité de la génération t à l'âge x, et $q_x^{\text{transv}}(t)$ le quotient de mortalité à l'âge x mesuré au cours de l'année t. Si on est dans une période d'allongement de la durée de la vie humaine, on s'attend à ce que

$$ q_x^{\text{long}}(t) < q_x^{\text{transv}}(t), $$

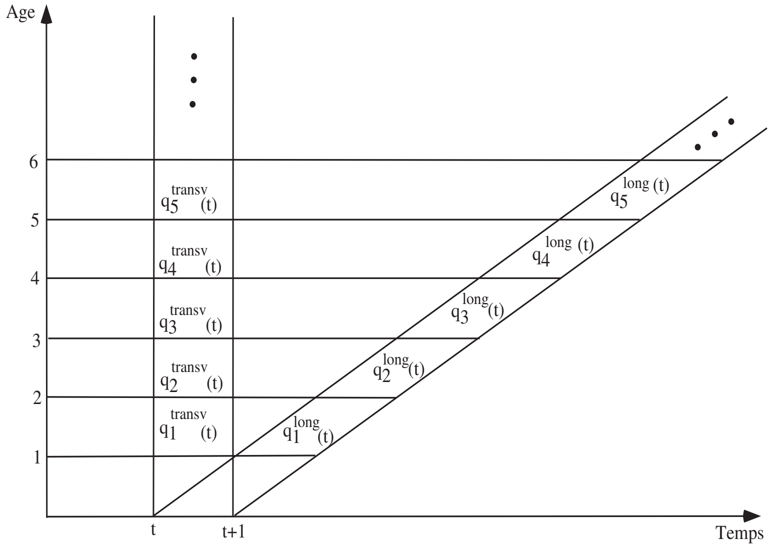

Figure 8: *Quotients de mortalité transversaux et longitudinaux.*

l'écart se creusant à mesure que l'âge x augmentera. Ainsi, un nouveau-né de l'année t aura une espérance de vie approximative de

$$\sum_{x=0}^{+\infty} {}_xp_0{}^{\text{long}}(t)\; q_x^{\text{long}}(t) \left(x+\frac{1}{2}\right)$$

qui sera supérieure à celle estimée sur base de l'observation de l'année t, valant

$$\sum_{x=0}^{+\infty} {}_xp_0{}^{\text{transv}}(t)\; q_x^{\text{transv}}(t) \left(x+\frac{1}{2}\right).$$

2.10 Estimation brute des quotients et des taux de mortalité

A partir des données disponibles auprès de l'INS, il est possible d'estimer les quotients et les taux de mortalité selon plusieurs méthodes, correspondant aux trois types de quadrilatères considérés plus haut.

2.10.1 Quotient et taux de mortalité pour un âge et une année

Il s'agit du taux le plus couramment utilisé. Il concerne deux générations, dont les individus seront considérés pendant des durées très variables selon leur date de naissance (d'un an à un jour). Le taux de mortalité vaut pour l'âge x et l'année t

$$\widehat{m}_x = \frac{\#\text{ décès à l'âge } x \text{ durant l'année } t}{\frac{\#\text{ d'individus d'âge } x \text{ au } 1/1/t + \#\text{ d'individus d'âge } x \text{ au } 1/1/t+1}{2}}.$$

Les décès dont le nombre figure au numérateur sont localisés dans le carré hachuré de la Figure 4. Le dénominateur peut se voir comme une approximation de l'intégrale définissant L_x basée sur l'idée que les individus meurent en moyenne en milieu d'année.

Le quotient de mortalité pour l'âge x et l'année t est plus difficile à estimer. Nous suivons ici la méthode décrite par GRIMMEAU (2000, page 37). On se sert de deux générations, à savoir

$t-x$ et $t-x-1$. On calcule d'abord

$$f = \frac{\text{\# décès à l'âge } x \text{ durant l'année } t \text{ pour la génération } t-x}{\begin{array}{l}\{\text{\# d'individus d'âge } x \text{ au } 1/1/t+1 \\ +\text{\# de décès à l'âge } x \text{ durant l'année } t \text{ pour la génération } t-x\}\end{array}}.$$

Il s'agit d'une estimation de la probabilité pour la génération $t-x$ de décéder à l'âge x durant l'année t: en effet, le numérateur de f est le nombre de décès localisés dans la partie inférieure droite du carré hachuré à la Figure 5, tandis que le numérateur est le nombre d'individus de la génération $t-x$ qui ont atteint l'âge x. Ensuite, on estime la probabilité pour la génération $t-x-1$ de décéder à l'âge x durant l'année t par

$$f' = \frac{\text{\# décès à l'âge } x \text{ durant l'année } t \text{ pour la génération } t-x-1}{\text{\# d'individus d'âge } x \text{ au } 1/1/t}.$$

Le recours au dénominateur de f' s'explique par le fait qu'on n'a généralement pas la possibilité d'estimer le nombre de personnes ayant fêté leur $x$ième anniversaire durant l'année $t-1$ (qui devrait jouer le rôle de l'effectif soumis au risque).

La probabilité p_x de survivre de son $x$ème à son $(x+1)$ème anniversaire est le produit des probabilités de survivre de son $x$ième anniversaire à la fin de l'année civile, et du début de l'année civile jusqu'à son $(x+1)$ème anniversaire, i.e.

$$\widehat{p}_x = (1-f)(1-f') \Rightarrow \widehat{q}_x = f + f' - ff'.$$

Si les probabilités f et f' sont très petites, ce qui est généralement le cas, le produit ff' est négligeable et le quotient q_x est alors estimé par la somme $f + f'$.

2.10.2 Quotient et taux perspectif pour une génération et une année

Ce taux de mortalité considère une génération au cours d'une année. Les décès recensés s'étalent sur deux années d'âge. Pour la génération g et l'année t, le taux vaut

$$\frac{\text{\# décès parmi les individus de la génération } g \text{ au cours de l'année } t}{\frac{\text{\# d'individus de la génération } g \text{ au } 1/1/t + \text{\# d'individus de la génération } g \text{ au } 1/1/t+1}{2}}.$$

Le quotient de mortalité s'obtient quant à lui grâce à la formule

$$\frac{\text{\# décès parmi les individus de la génération } g \text{ au cours de l'année } t}{\text{\# d'individus de la génération } g \text{ au } 1/1/t}.$$

Un coup d'oeil à la Figure 6 permet de reconstituer les deux formules ci-dessus.

2.10.3 Quotient et taux de mortalité pour une génération à un âge donné

Si on dispose des statistiques de deux années-calendrier successives, il est possible de calculer un taux de mortalité relatif à une seule année d'âge et à une seule génération. Pour l'âge x et la génération g, le taux vaut

$$\frac{\text{\# décès à l'âge } x \text{ parmi les individus de la génération } g}{\text{\# d'individus d'âge } x \text{ au } 1/1/g+x+1}.$$

En revenant à la Figure 5, on voit que les décès figurant au numérateur sont ceux situés dans le parallélogramme hachuré, tandis que le dénominateur estime L_x apparaissant dans la définition de m_x.

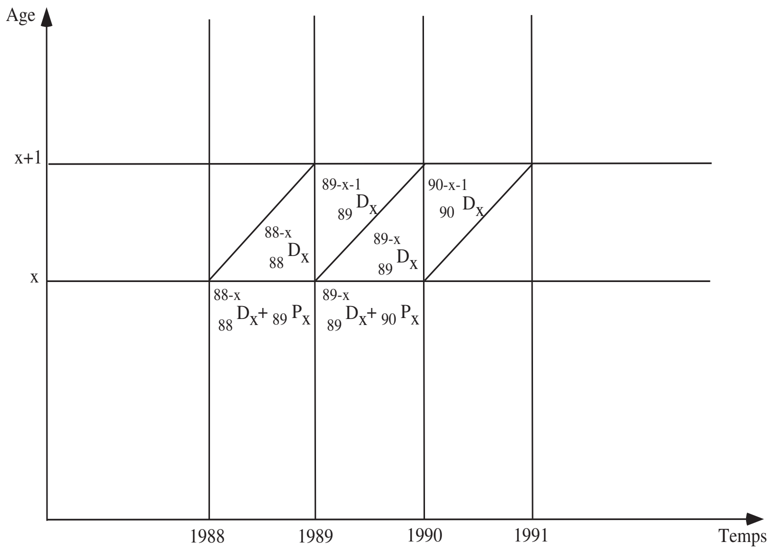

Figure 9: *Représentation de la formule d'estimation utilisée par l'INS dans le diagramme de Lexis.*

Le quotient de mortalité pour l'âge x et la génération g vaut alors

$$\frac{\#\text{ décès à l'âge } x \text{ parmi les individus de la génération } g}{\frac{\#\text{ d'individus d'âge } x \text{ au } 1/1/x+g+1 + \#\text{ de décès durant l'année } x+g \text{ parmi les individus de la génération } g}{2}}.$$

A nouveau, un coup d'oeil à la Figure 5 permet de comprendre sans difficulté la formule: les décès au numérateur sont ceux du parallélogramme hachuré, tandis que l'effectif au numérateur estime le nombre d'individus de la génération g ayant atteint l'âge x.

2.10.4 Quotients INS

Les tables officielles dressées par l'INS sont la plupart du temps basées sur trois années d'observation consécutives. Supposons que ces trois années sont 1988, 1989 et 1990. L'estimation de la probabilité annuelle de décès q_x est alors donnée par

$$\begin{aligned}\widehat{q}_x &= \frac{\#\text{ décès à l'âge } x \text{ parmi les individus des générations } 88-x \text{ et } 89-x}{\#\text{ d'individus des générations } 88-x \text{ et } 89-x \text{ ayant atteint l'âge } x}\\ &= \frac{{}^{88-x}_{88}D_x + {}^{89-x-1}_{89}D_x + {}^{89-x}_{89}D_x + {}^{90-x-1}_{90}D_x}{{}_{89}P_x + {}_{90}P_x + {}^{88-x}_{88}D_x + {}^{89-x}_{89}D_x}\end{aligned}$$

où ${}_zP_x$ désigne la population (en nombre d'âmes) d'âge x au premier janvier de l'année z et ${}^y_zD_x$ est le nombre de décès observés durant l'année z parmi les individus d'âge x nés l'année y. L'estimateur $\widehat{q}_x$ revient donc à diviser le nombre total de décès par le nombre total d'individus, pris au cours de trois années successives. On peut voir à la Figure 9 comment ces différentes valeurs se répartissent dans le diagramme de Lexis. La probabilité de décès au cours de la première année d'existence est estimée par

$$\widehat{q}_0 = \frac{{}^{88}_{88}D_0 + {}^{88}_{89}D_0 + {}^{89}_{89}D_0 + {}^{89}_{90}D_0}{{}_{88}N + {}_{89}N}$$

où ${}_zN$ donne le nombre de naissances enregistrées au cours de l'année z.

La source utilisée par l'INS est le Registre national des personnes physiques, tant pour les décès que pour la population et les naissances. Le registre permet de connaître la structure d'âge de la population comme des décès. L'unicité de la source garantit la cohérence des résultats. Les tables relatives à la population belge sont désormais présentées jusqu'à l'âge de 105 ans. Elles ne sont pas fermées.

2.11 Les indicateurs synthétiques d'intensité de la mortalité

Le décès étant pour chaque individu un événement unique mais inévitable, l'intensité de la mortalité se mesure en démographie en déterminant un âge représentatif au décès. Comme pour toute distribution statistique, on peut calculer la moyenne, la médiane et le mode. Les décès sur lesquels ces valeurs sont calculées sont ceux de la table (et pas ceux observés dans la population), de façon à éliminer l'influence de faits particuliers du passé. En plus des indicateurs démographiques, nous considérerons également un indicateur actuariel, à savoir la prime unique pure relative à un contrat de rente viagère. Cette prime peut d'ailleurs se voir comme une version pondérée de l'espérance de vie, donnant plus d'importance aux premières années.

2.11.1 Espérance de vie

Un concept fondamental est la durée de vie moyenne restante à l'âge x, notée e_x. Il s'agit d'une des caractéristiques les plus couramment utilisées pour rendre compte du phénomène de la mortalité. L'espérance de vie à l'âge x est l'espérance de la durée restant à vivre après x, ou durée de vie moyenne au-delà de x, pour les survivants à l'âge x. Elle est définie par

$$e_x = \mathbb{E}[T_x] = \frac{1}{\ell_x} \int_{\xi=0}^{+\infty} \ell_{x+\xi} du = \frac{L_{x\bullet}}{\ell_x};$$

l'intégrale figurant dans cette dernière expression nous donne le nombre moyen d'années vécues au-delà de l'âge x par les individus ayant atteint cet âge, et la division par ℓ_x donne donc le nombre moyen d'années restant à vivre pour chacun des ℓ_x individus ayant atteint l'âge x. Pour un actuaire, e_x peut également se voir comme la prime unique pure correspondant à une rente viagère unitaire au taux 0 servie continûment.

On a souvent recours aux e_x pour différents âges x (notamment l'espérance de vie à la naissance e_0) afin d'illustrer l'allongement de la durée de la vie humaine dans nos contrées, ou encore pour comparer la mortalité de deux pays ou de deux régions. Les espérances de vie par âge sont généralement données par les tables de mortalité. Il est intéressant d'examiner un graphique de ces durées de vie en fonction de l'âge. Si les mortalités infantile et juvénile sont élevées, l'espérance de vie peut présenter son maximum à un âge supérieur à zéro, mais normalement inférieur à 5. On peut utiliser l'espérance de vie à 5 ans comme indicateur du niveau de la mortalité en dehors de la mortalité infanto-juvénile.

2.11.2 Vie médiane

La vie médiane, ou vie probable, est l'âge qu'une personne a autant de chance d'atteindre que de ne pas atteindre. Notée vm, elle est défine par

$${}_{vm}p_0 = \frac{1}{2}.$$

Cette notion peut également être interprétée comme l'âge où la moitié des individus présents à la naissance (racine de la table) sont décédés.

La vie médiane peut être calculée comme suit. Disposant des ordres de survie ℓ_x, on repère le premier âge x_0 tel que $\ell_{x_0} \leq \ell_0/2$. En cas d'égalité, $vm = x_0$. Sinon, on détermine vm par interpolation linéaire.

2.11.3 Prix d'une rente viagère

Soit i le taux d'intérêt annuel et $v = (1+i)^{-1}$ le facteur d'escompte associé (c'est-à-dire la valeur actuelle d'un capital unitaire payable dans une année). La prime unique pure relative à une rente viagère payable continûment est

$$\overline{a}_x = \int_{\xi=0}^{+\infty} {}_{\xi}p_x v^{\xi} d\xi = \frac{1}{\ell_x} \int_{\xi=0}^{+\infty} \ell_{x+\xi} v^{\xi} d\xi,$$

qui apparaît bien comme une version pondéré de l'espérance de vie e_x. Dans le cas particulier où $i = 0 \Leftrightarrow v = 1$, on a $\overline{a}_x = e_x$.

En pratique, la compagnie ne verse pas continûment la rente à l'assuré. Si les versement ont lieu une fois l'an (à terme échu), le prix de la rente vaut

$$a_x = \sum_{k=1}^{+\infty} {}_k p_x v^k.$$

2.12 Hypothèse à propos de la répartition des décès sur l'année

La plupart du temps, les données dont dispose l'actuaire sont le fruit d'un groupement par période. Ainsi, il sait combien de décès se sont produits sur une période parmi les individus d'un certain âge en début de période. En l'absence d'information quant à la répartition des décès durant l'année, l'actuaire doit recourir à des hypothèses de travail. Cette section est consacrée à l'hypothèse que nous retiendrons durant toute cette étude (pour des raisons qui deviendront claires dans la deuxième partie du travail). Le lecteur trouvera dans l'Annexe A une description de l'autre hypothèse classique proposée dans la littérature actuarielle, à savoir la répartition uniforme des décès dans l'année. Ces deux hypothèses y sont également comparées.

Dorénavant, nous supposerons que les taux instantanés de mortalité sont constants par morceaux, i.e.

$$\mu_{x+t} = \mu_x \text{ pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } x \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

On vérifie facilement que dans ce cas

$$\begin{aligned}
q_x &= \frac{d_x}{\ell_x} \\
\mu_x &= m_x = -\ln(1-q_x) \\
\ell_x &= \ell_{x-1} - q_{x-1}\ell_{x-1} = \ell_{x-1} - d_{x-1} \\
d_x &= \ell_x q_x = \ell_x - \ell_{x+1} \\
L_x &= \int_{\xi=0}^{1} \ell_{x+\xi} d\xi = \ell_x \int_{\xi=0}^{1} (1 - {}_{\xi}q_x) d\xi \\
&= \ell_x \int_{\xi=0}^{1} (1-q_x)^{\xi} d\xi = \frac{-\ell_x q_x}{\ln(1-q_x)} \\
L_{x\bullet} &= \sum_{y=x}^{\omega-1} L_y \\
e_x &= \frac{L_{x\bullet}}{\ell_x}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Enfin, sous (4), il vient pour $0 \leq t < 1$

$${}_t p_x = \exp(-t\mu_x) = \{p_x\}^t$$

et

$${}_t q_x = 1 - \{p_x\}^t = 1 - (1-q_x)^t.$$

2.13 Age ultime?

Il n'y a pas unanimité sur la question de savoir s'il y a un âge ultime ω, ou âge biologique maximal, comme le relèvent entre autres Poh & Brown (1995) et Brown (1997). Cet âge limite est défini par $q_{\omega-1} = 1$. Aucun individu ne peut donc dépasser l'âge ω.

La plupart des actuaires, s'appuyant sur des avis autorisés de médecins ou d'éminents biologistes, croient à la réalité de cette borne supérieure à la durée de la vie humaine, qui serait inscrite dans ses gênes. Force est pourtant de constater que les études actuarielles les plus récentes ont mis en évidence des probabilités annuelles de décès qui atteignent des niveaux importants (de l'ordre de 50%) vers l'âge de 100 ans, sans plus croître considérablement par la suite. Ceci pourrait contredire l'hypothèse d'un âge maximal. Même si on ne peut formellement exclure l'hypothèse de l'existence d'un âge ultime, les données ne mettent pas une telle borne en évidence, comme en témoigne l'étude fouillée de Wilmoth (1997); voyez aussi Wilmoth et al. (2000).

L'examen des probabilités de décès aux âges élevés fait apparaître les caractéristiques suivantes:

- au-delà de 80 ans, les probabilités annuelles de décès q_x augmentent à un taux décroissant (la fonction $x \mapsto q_x$ est donc concave);
- la mortalité décroît au cours du temps dans cette tranche d'âge.

C'est ce qui ressort de l'étude de Vaupel (1997), qui fonde ses résultats sur une base de données reprenant 70 millions d'êtres humains de 14 pays ayant atteint l'âge de 80 ans, parmi lesquels on recense 200 000 centenaires (période d'observation 1980-1992).

En tant qu'actuaire, nous nous devons donc d'être pragmatique (étant bien en peine de trancher cette épineuse question). Remarquons que sur un million de centenaires soumis à des probabilités annuelles de décès de 50%, seul un d'entre eux atteindrait l'âge de 120 ans. Nous ne tenterons donc pas de "fermer" les tables de mortalité (c'est-à-dire d'extrapoler les probabilités annuelles de décès au-delà des âges observés, jusqu'à un âge ultime), et encore moins de projeter ces probabilités de décès dans l'avenir, jugeant l'entreprise trop hasardeuse. Nous nous contenterons de considérer les probabilités de décès constantes après la dernière valeur observée. Même si ces probabilités semblent être concaves pour des âges très élevés, elles n'en restent pas moins croissantes, ce qui rend notre hypothèse simplificatrice prudente dans l'optique du calcul des primes relatives à des contrats de rente viagère.

Nous ferons donc l'économie de longs débats quant à la réalité de l'âge ultime, débats auxquels les actuaires seront généralement étrangers, et nous considérerons très pragmatiquement un "âge ultime" de 120 ans, approximation raisonnable de la réalité. Cet "âge ultime" sera plutôt une limite au-delà de laquelle les éventuels survivants seront négligés dans le calcul des indicateurs démographiques ou des primes d'assurance.

2.14 Types de tables de mortalité

Outre les tables INS, on distingue traditionnellement trois types de tables de mortalité en sciences actuarielles: les tables officielles imposées par l'autorité de tutelle, les tables dressées à partir de données "marché" collectées par un organisme professionnel ou une autorité de contrôle et les tables d'expérience dressées au sein des compagnies d'assurance.

2.14.1 Tables officielles

Contrairement à ce qui se fait dans certains pays étrangers (notamment au Royaume-Uni), la table de mortalité est garantie en Belgique pour toute la durée du contrat (donc souvent pendant plusieurs dizaines d'années). Ceci a conduit les autorités belges à déterminer très prudemment les tables de mortalité officielles en y incorporant des chargements de sécurité (consistant à majorer les taux de mortalité pour les opérations en cas de décès, et à les réduire pour les opérations en cas de vie) parfois conséquents. Les tables de mortalité actuellement en vigueur sont basées sur une modélisation de Makeham dont les paramètres sont fixés par le Roi.

La formule de Makeham postule que la probabilité de décès à l'âge x est donnée par

$$q_x = 1 - sg^{c^x(c-1)} \text{ où } 0 < s \leq 1, \ \ 0 < g < 1 \text{ et } c > 1. \tag{6}$$

Le taux instantané de mortalité à l'âge x correspondant vaut alors

$$\mu_x = A + \beta c^x, \text{ où } A \geq 0 \text{ et } \beta > 0. \tag{7}$$

Les paramètres A et β intervenant dans (7) sont liés aux paramétres initiaux s, g, et c intervenant dans (6) par les relations

$$A = -\ln(s), \ \ \beta = -\ln(g)\ln(c).$$

Le modéle de Makeham revient donc à considérer que le taux instantané de mortalité à l'âge x se décompose comme suit:

1. un premier terme constant, A, qui est indépendant de l'âge atteint x et représente la mortalité accidentelle ainsi que celle due aux maladies pouvant survenir indifféremment à tout âge;

2. un second terme croissant en x, βc^x, qui représente la mortalité due au vieillissement, pour laquelle on postule un comportement exponentiel.

Le succès de la loi de Makeham tient surtout à sa simplicité, ainsi qu'à ses propriétés actuarielles remarquables (même si ces dernières, depuis l'avénement des micro-ordinateurs, n'ont plus la même importance que par le passé). Les actuaires anglo-saxons, pour leur part, semblent aprécier la loi de Heligman-Pollard (qui compte 8 paramètres), entre autres parce que sa souplesse permet de rendre compte de la mortalité infantile ainsi que de la bosse accident (ce que ne peut pas faire la loi de Makeham), tout en décrivant bien la mortalité due au vieillissement; voyez HELIGMAN & POLLARD (1980). Cette loi a été utilisée dans l'enquête de MCDONALD ET AL. (1998) et a permis de modéliser la mortalité observée dans la majeure partie des 38 pays étudiés.

Les valeurs des paramètres intervenant dans (6) pour définir les tables MR et FR applicables aux rentes sont reprises au Tableau 1.

Paramètres	MR
s	0.999 441 703 848
c	1.101 077 536 030
g	0.999 733 441 115
Paramètres	FR
s	0.999 669 730 966
c	1.116 792 453 830
g	0.999 951 440 172

Table 1: Les valeurs des paramètres définissant les tables de mortalité MR et FR.

Il est bien connu que les tables MR et FR n'incorporent parfois plus aucun chargement de sécurité. Ces tables sont à présent totalement obsolètes, et on comprend mal l'entêtement du législateur à les conserver. Comme l'a fait remarquer SCHRYVERS (2000, page 4), exemples à l'appui, les autorités belges se sont toujours servies de tables périmées, même quand il y avait des données plus récentes à leur disposition.

2.14.2 Tables "marché"

Source d'information particulièrement intéressante pour les actuaires, les tables de mortalité basées sur l'ensemble des assurés belges: celles-ci sont dressées périodiquement par l'Union Professionnelle des Entreprises d'Assurances (UPEA). Ne tenant pas compte des catégories de la population qui ne trouvent pas à s'assurer ou qui n'éprouvent pas le besoin de s'assurer, la mortalité découlant de ces tables est davantage représentative de la réalité.

L'UPEA refusant de communiquer ses statistiques au monde académique (pour des raisons qui nous échappent), les données de base d'une étude de la mortalité des assurés belges sont celles que fournissent annuellement les entreprises d'assurance à l'OCA. Une double distinction y est opérée selon le sexe des assurés, et le type d'assurance (individuelle/groupe ainsi que vie/décès). L'Office a récemment amélioré ses systèmes de collecte statistique, et les données qu'il met à la disposition du public sont de grande qualité. Nous reviendrons en détail sur ces données dans la troisième partie de notre étude.

2.14.3 Tables d'expérience

Enfin, les tables d'expérience: elles sont dressées par les compagnies d'assurance sur base de la "sinistralité" observée au sein de leur propre portefeuille d'assurance-vie. Ces tables de mortalité présentent souvent l'inconvénient que le groupe de référence est relativement restreint, et que, dès lors, les fluctuations observées quant à la mortalité peuvent être importantes.

3 Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours

Maintenant que nous disposons de tous les outils permettant d'analyser la mortalité, nous présentons dans cette section les traits marquants de l'évolution de la mortalité en Belgique.

3.1 Rectangularisation des courbes de survie

Si on observe le graphe de la fonction $x \mapsto {}_{x-1}p_0 q_x = d_x/\ell_0$ représenté à la Figure 10, on constate une concentration croissante autour du mode. Ceci a pour effet de "rectangulariser" la courbe de survie $x \mapsto {}_x p_0 = \ell_x/\ell_0$, comme on peut le voir à la Figure 11 (les individus vivent en grand nombre jusqu'à des âges élevés, avant de mourir). De plus, le mode tend à se déplacer vers les âges élevés (phénomène d'expansion), comme on peut le voir à la Figure 10.

Expliquons plus en détail le phénomène de rectangularisation. Autrefois, le nombre de survivants décroissait régulièrement en fonction de l'âge, et ce dès les premières années. La baisse continue des quotients de mortalité à quasiment tous les âges conduit à maintenir les cohortes dans leur quasi-entièreté jusqu'à des âges élevés. Avec l'évolution favorable de la mortalité, la fonction de survie change d'allure pour s'approcher de plus en plus d'un rectangle, comme on peut le constater à la Figure 11: le nombre de survivants d'une cohorte, au lieu de s'affaiblir progressivement au fur et à mesure que cette cohorte vieillit, se maintient quasi dans son entièreté jusqu'à 60-70 ans pour ensuite diminuer très rapidement aux âges avancés.

Ce phénomène de rectangularisation s'accompagne également d'une diminution de la variance de la durée de vie T au cours du temps, de même que du coefficient de variation associé, comme on le constate au Tableau 2. On remarque au passage que le phénomène de rectangularisation est plus marqué chez les femmes que chez les hommes.

Afin de quantifier le phénomène de rectangularisation, on a souvent recours à l'entropie de la table de mortalité (notée H) définie comme

$$H = -\frac{\int_{x=0}^{\omega} \ln(\ell_x)\ell_x dx}{\int_{x=0}^{\omega} \ell_x dx}.$$

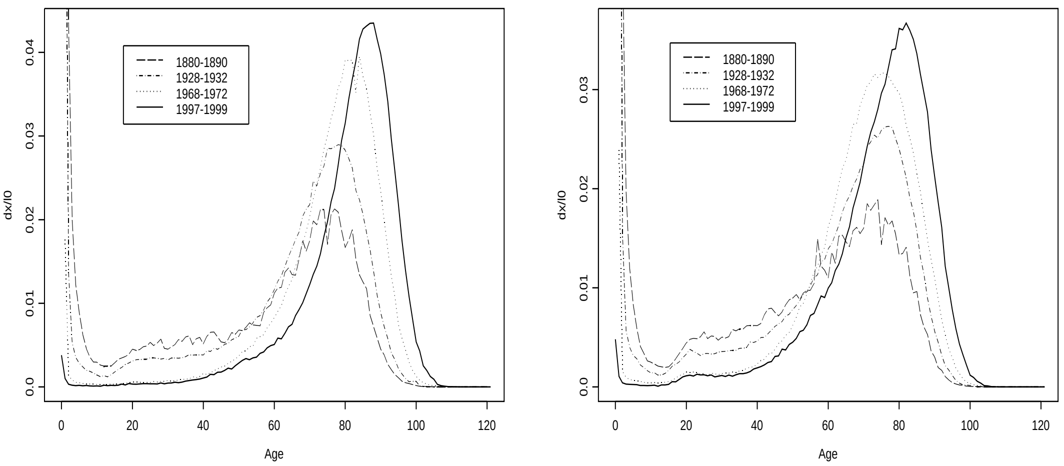

Figure 10: *Densité* $x \mapsto d_x/\ell_0$ *pour les femmes (à gauche) et pour les hommes (à droite).*

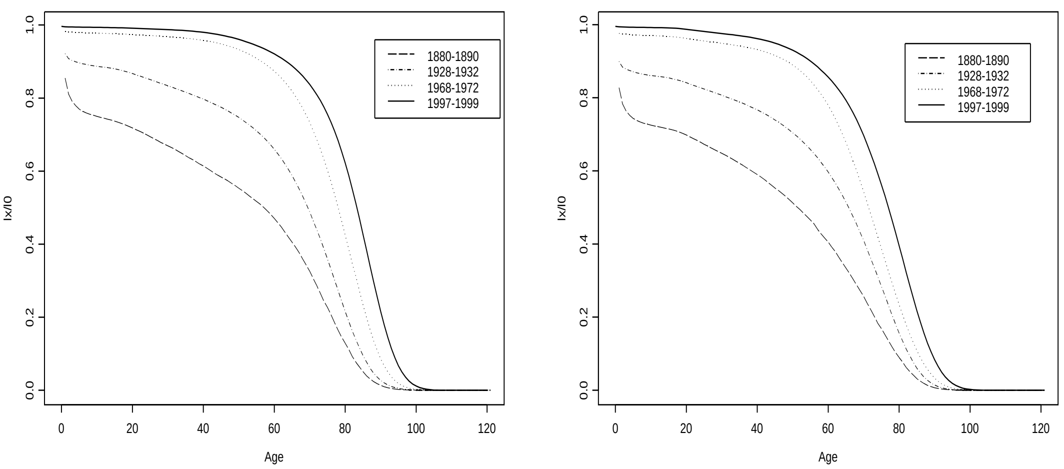

Figure 11: *Fonction de survie* $x \mapsto \ell_x/\ell_0$ *pour les femmes (à gauche) et pour les hommes (à droite).*

Période	Esp. de vie $e_0 = \mathbb{E}[T]$		Variance $\mathbb{V}\mathrm{ar}[T]$		Coef. de variation $\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[T]}/\mathbb{E}[T]$	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
1880-1890	43.29	46.51	932.29	977.13	0.71	0.67
1928-1932	56.03	59.80	749.48	716.63	0.49	0.45
1946-1949	62.03	67.26	573.35	521.39	0.39	0.34
1956-1959	67.15	73.18	377.87	325.36	0.29	0.25
1968-1972	67.78	74.20	332.76	288.47	0.27	0.23
1979-1982	70.03	76.80	284.23	253.16	0.24	0.21
1988-1990	72.42	79.12	253.52	218.49	0.22	0.19
1991-1993	72.99	79.77	256.82	215.67	0.22	0.18
1994-1996	74.06	80.75	251.46	211.48	0.21	0.18
1997-1999	74.76	81.17	242.19	204.18	0.21	0.18

Table 2: Variances et coefficients de variation associés aux durées de vie décrites par les tables INS 1880-1890 à 1997-1999.

Retravaillons cette expression afin de lui donner une signification: comme le taux de mortalité μ_x à l'âge x est lié aux ordres de survie ℓ_x par la formule

$$\mu_x = -\frac{1}{\ell_x}\frac{d}{dx}\ell_x = -\frac{d}{dx}\ln \ell_x, \tag{8}$$

on obtient

$$\begin{aligned} H &= \frac{\int_{x=0}^{\omega}\int_{\xi=0}^{x} \ell_x \mu_\xi d\xi dx}{\ell_0 e_0} \\ &= \frac{\int_{x=0}^{\omega} \ell_x \mu_x e_x dx}{\ell_0 e_0}. \end{aligned}$$

Le numérateur de H représente le nombre moyen d'années perdues suite aux décès (puisque $\mu_x \ell_x$ peut s'interpréter comme le nombre moyen de décédés à l'âge x, et e_x est la durée de vie restante de chacun d'eux); H peut donc se voir comme le gain relatif d'espérance de vie si le "premier" décès était évité.

Deux cas extrêmes peuvent se présenter: si $H = 0$, tous les individus de la population décèdent exactement au même âge et si $H = 1$, le taux instantané de mortalité est constant à travers les âges ($\mu_x \equiv \mu$). Ainsi, la rectangularisation des tables de survie s'accompagne d'une diminution de H. Les valeurs reprises au Tableau 3 illustrent l'évolution de H au cours du siècle dernier en Belgique. On constate une diminution de H au cours du temps, aussi bien pour les hommes que pour les femmes, ce qui traduit bien la rectangularisation progressive des ordres de survie.

Pour terminer, notons que le phénomène de rectangularisation peut également s'appréhender grâce à la vie médiane. Comme on peut le voir à la Table 4, la vie médiane est en progression constante, aussi bien pour les hommes que pour les femmes. Ceci indique donc bien que le nombre de survivants se maintient au fil des ans pour ensuite chuter brutalement.

3.2 Gains en espérance de vie

On peut voir à la Table 5 les espérances de vie à la naissance e_0 et à 65 ans e_{65} calculées sur base des tables INS 1880-1890 à 1997-1999. On constate clairement une augmentation de ces valeurs au cours du temps, mais à un rythme irrégulier.

Période	Entropie H	
	Hommes	Femmes
1880-1890	0.582 365	0.541 471
1928-1932	0.361 127	0.322 454
1946-1949	0.278 847	0.233 122
1956-1959	0.207 715	0.166 682
1968-1972	0.196 588	0.159 110
1979-1982	0.179 869	0.147 619
1988-1990	0.165 568	0.135 529
1991-1993	0.164 555	0.132 974
1994-1996	0.161 062	0.130 737
1997-1999	0.157 158	0.128 127

Table 3: Entropies associés aux tables INS 1880-1890 à 1997-1999.

Période	Hommes	Femmes
1880-1890	51.35	57.08
1928-1932	65.74	69.44
1946-1949	69.12	74.17
1959-1963	71.45	77.30
1968-1972	71.40	78.00
1979-1982	73.33	80.30
1988-1990	75.51	82.28
1991-1993	76.24	82.94
1994-1996	77.25	83.98
1997-1999	77.83	84.29

Table 4: Evolution de la vie médiane vm telle que reflétée par les tables INS 1880-1890 à 1997-1999.

La Figure 12 reprend les fonctions $x \mapsto e_x$ durant les quatre périodes 1880-1890, 1928-1932, 1968-1972 et 1997-1999. On constate qu'en 1880-1890 et 1928-1932, la courbe $x \mapsto e_x$ présente un unique mode aux alentours de 5 ans (c'est-à-dire que l'espérance de vie commence par croître jusqu'à l'âge de 5 ans environ, avant de décroître ensuite). Ceci est caractéristique des populations où le niveau de mortalité infantile est encore fort important. Tentons d'expliquer ce phénomène. Pour ce faire, notons que

$$\frac{d}{dx}e_x = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\ell_x}\int_{t=x}^{\omega}\ell_t dt\right\} = \frac{-(\ell_x)^2 - \frac{d}{dx}\ell_x \int_{t=x}^{\omega}\ell_t dt}{(\ell_x)^2}$$

qui donne

$$\frac{d}{dx}e_x = -1 + \mu_x e_x$$

puisque $\frac{d}{dx}\ell_x = -\mu_x \ell_x$. Aux âges où la mortalité est faible (i.e. $\mu_x \approx 0$) chaque année nous rapproche donc d'un an de la date de notre mort ($\frac{d}{dx}e_x \approx -1$). Par contre, si la mortalité est fort importante (i.e. la valeur de μ_x est très élevée), la dérivée de e_x par rapport à x peut être positive. C'est le cas pour les très jeunes âges, dans les populations où la mortalité infantile est très élevée (typiquement, les enfants de 5 ans ont une espérance de vie plus élevée que les nouveau-nés). En ce qui concerne les périodes plus récentes, les espérances de vie e_x décroissent régulièrement en x, signe que la mortalité infantile a été maîtrisée.

	e_0		e_{65}	
Période	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
1880-1890	43.29	46.51	10.67	11.60
1928-1932	56.03	59.80	11.42	12.56
1946-1949	62.03	67.26	12.32	13.87
1959-1963	67.15	73.18	12.43	14.83
1968-1972	67.78	74.20	12.09	15.28
1979-1982	70.03	76.80	12.94	16.91
1988-1990	72.42	79.12	14.02	18.30
1991-1993	72.99	79.77	14.50	18.79
1994-1996	74.06	80.75	15.21	19.58
1997-1999	74.76	81.17	15.62	19.85

Table 5: Evolution de e_0 et de e_{65} telle que reflétée par les tables INS 1880-1899 à 1997-1999.

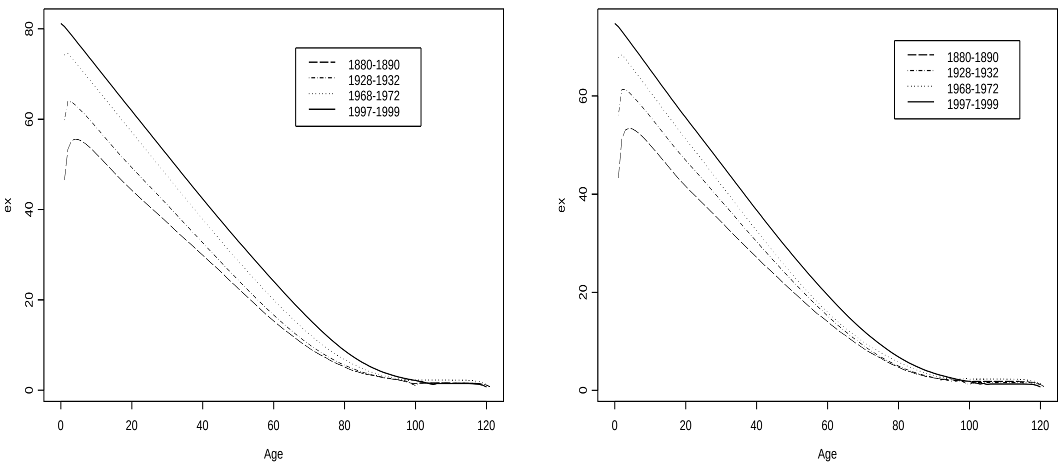

Figure 12: *Espérance de vie $x \mapsto e_x$ pour les femmes (à gauche) et pour les hommes (à droite).*

Il est clair que tous les âges n'ont pas bénéficié de l'amélioration de la mortalité dans les mêmes proportions. On peut voir à la Figure 13 le rapport des probabilités annuelles de décès $q_x^{1997-1999}/q_x^{1880-1890}$. Clairement, l'amélioration la plus spectaculaire se situe aux âges jeunes, ce qui a permis d'augmenter significativement les espérances de vie sur cette période. Les améliorations de la mortalité aux âges plus avancés sont moins importants (les chiffres au-delà de 99 ans ne doivent pas être pris en compte).

3.3 Bosse accident plus marquée et plus dispersée

La bosse accidents (pudiquement appelée ainsi, alors qu'elle recouvre en fait énormément de suicides) a tendance à se disperser et à se marquer davantage. Elle se traduit par des quotients et des taux instantanés de mortalité particulièrement élevés vers 20-30 ans à cause du risque accru de morts violentes.

On peut voir à la Figure 14 les taux instantanés de mortalité pour les hommes et pour les femmes. On observe que le creux de la mortalité (des 5-15 ans) se marque sans cesse davantage. Ensuite, la bosse des morts violentes apparaît clairement, surtout pour les hommes. Au-delà de

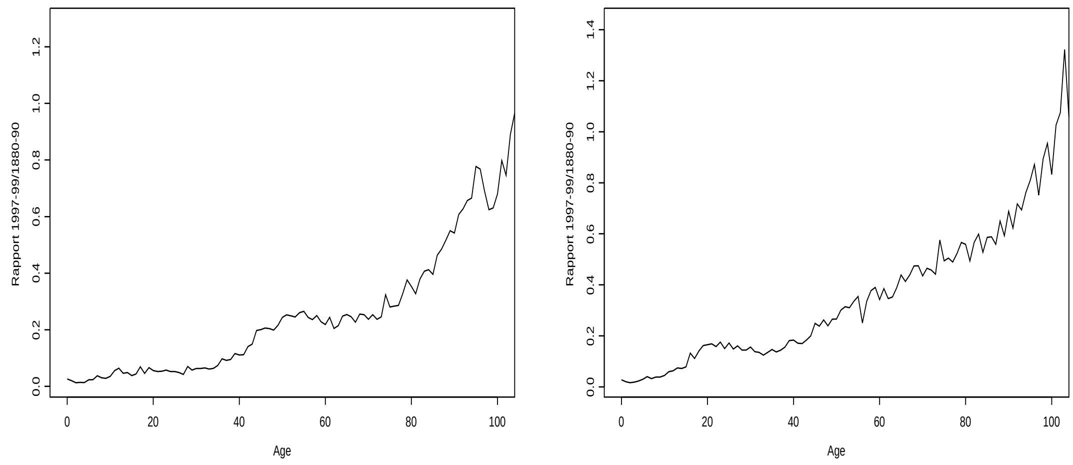

Figure 13: *Rapport des probabilités annuelles de décès* $q_x^{1997-1999}/q_x^{1880-1890}$ *pour les femmes (à gauche) et pour les hommes (à droite).*

30 ans, la mortalité poursuit son inexorable évolution à un rythme plus régulier.

3.4 Ecarts de mortalité entre hommes et femmes chez les plus de soixante ans

La population âgée diffère sensiblement de la population générale par la proportion de femmes qui la composent. Bien que les nouveau-nés soient majoritairement masculins, les différences de mortalité entre hommes et femmes induisent un renversement de cette tendance dans la population âgée. A partir de 30-35 ans, le nombre de femmes commence à excéder le nombre d'hommes, et l'écart se creuse avec l'âge. Cette dominante de femmes chez les personnes âgées n'est évidemment pas sans conséquence sur la gestion des régimes de sécurité sociale, la demande de soins de santé des aînés étant principalement le fait des femmes. Nous allons brièvement examiner ces aspects, nous basant sur Kinsella & Gist (1998).

Ces auteurs mettent en exergue la spectaculaire évolution de l'espérance de vie à la naissance à laquelle on a pu assister durant le 20ème siècle. Il y est démontré

(i) que le rythme d'allongement de la durée de vie moyenne est loin d'être linéaire (particulièrement pour les hommes)

(ii) que la différence de longévité hommes/femmes s'accroît en faveur des femmes.

Ces différences de mortalité ont bien entendu des répercussions importantes sur la part de femmes dans la population âgée. Ainsi, dans les pays développés, il y avait en 1998 69.7 hommes pour 100 femmes parmi les plus de 60 ans et 44.3 hommes pour 100 femmes parmi les plus de 80 ans (selon les chiffres de l'US Bureau of the Census). Des projections à l'horizon 2025 effectuées par Kinsella & Gist (1998) font passer ces chiffres respectivement à 78 et 55.8.

En ce qui concerne la Belgique, on peut voir à la Figure 15 les espérances de vie à la naissance pour les hommes et pour les femmes calculée sur base des tables INS 1880-1890 à 1997-1999, de même que la différence entre ces espérances (les valeurs numériques sont celles du Tableau 5). La Figure 16 reprend les valeurs de e_{65}, et est également basée sur le Tableau 5.

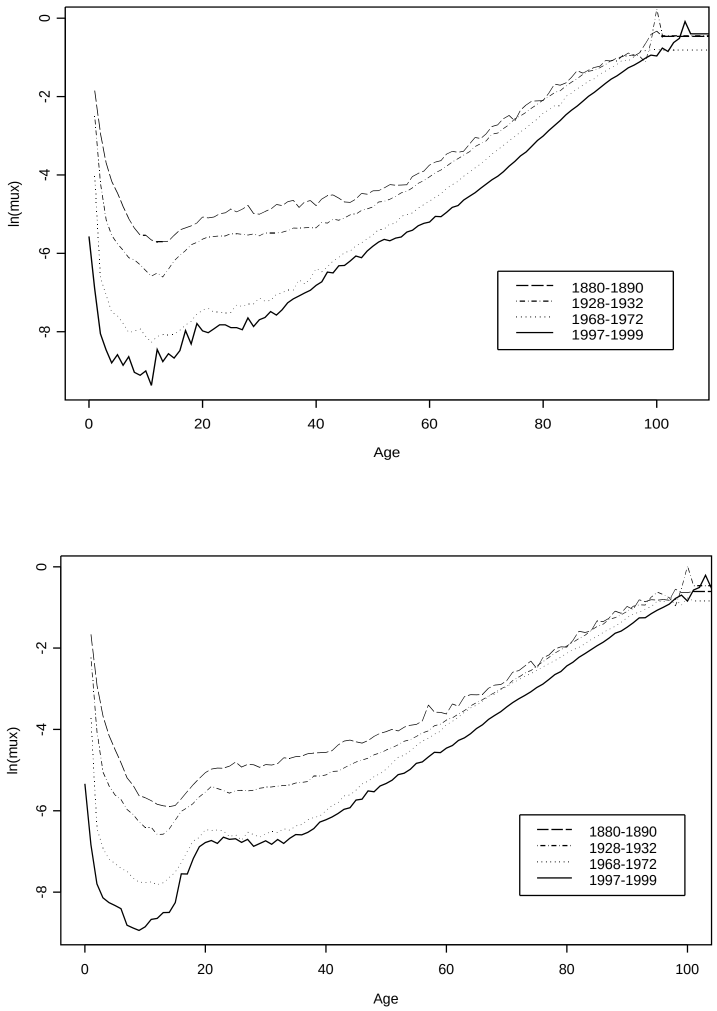

Figure 14: *Logarithme des taux instantanés de mortalité* $x \mapsto \ln(\mu_x)$ *pour les femmes (en haut) et pour les hommes (en bas).*

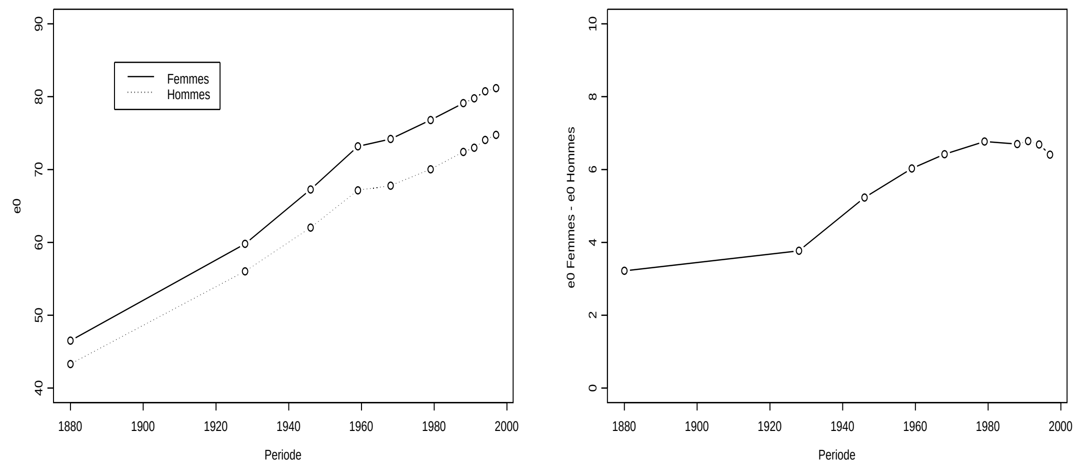

Figure 15: *Evolution de l'espérance de vie à la naissance e_0 par sexe (à gauche) et différence femmes-hommes (à droite).*

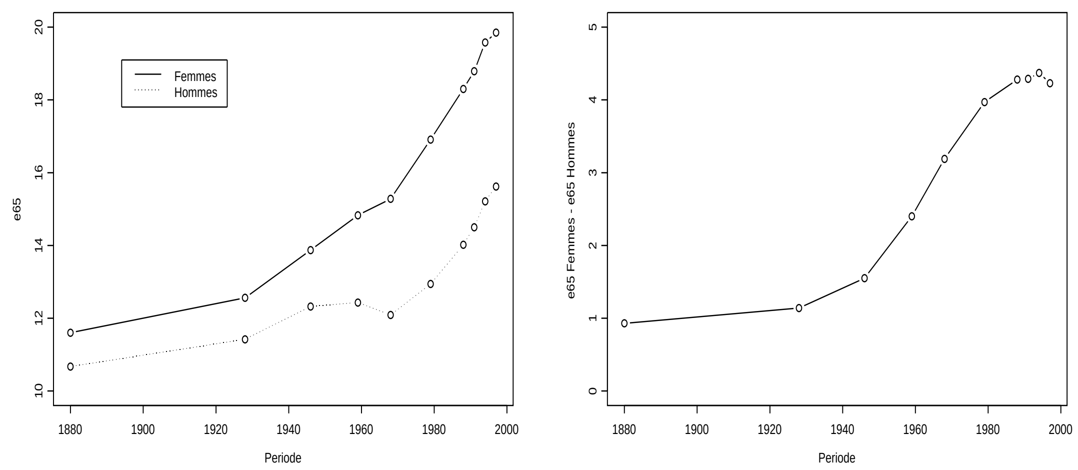

Figure 16: *Evolution de l'espérance de vie à 65 ans e_{65} par sexe (à gauche) et différence femmes-hommes (à droite).*

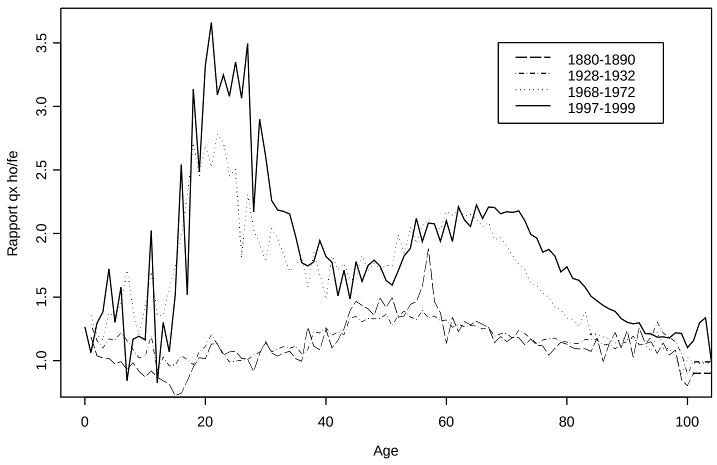

Figure 17: *Rapport des quotients de mortalité* q_x^{homme}/q_x^{femme} *en fonction de l'âge x.*

A la Figure 17, nous avons porté en graphique le rapport entre les probabilités annuelles de décès pour les hommes et pour les femmes, pour les quatre tables 1880-1890, 1928-1932, 1968-1972 et 1997-1999. Une valeur du rapport supérieure à 1 indique une surmortalité des hommes pour l'âge et la période considérés. Si en 1880-1890 et 1926-1932 les quotients de mortalité étaient plus ou moins similaires pour les deux sexes, il n'en est plus du tout de même pour les périodes 1968-1972 et 1997-1999, où la mortalité des femmes est notablement plus faible que celle des hommes, et ce à quasi tous les âges.

La Figure 18 décrit la différence entre les espérances de vie e_x des hommes et des femmes (une valeur positive indique une espérance de vie supérieure pour les femmes). Une récente contribution de Lemaire (2001) analyse une série de raisons pour expliquer l'espérance de vie supérieure des femmes dans 169 pays.

4 Quelles conséquences pour la tarification des rentes?

Le Tableau 6 illustre l'évolution des valeurs de a_{65} (à 4%) calculées sur base des tables INS 1888-1890 à 1997-1999. On constate une augmentation assez marquée de la valeur d'une rente viagère servie à un individu de 65 ans au fil du temps.

Force est donc de constater que la mortalité est en perpétuelle évolution, et que l'actuaire qui baserait le calcul des primes relatives aux rentes viagères sur une table de mortalité du moment (ou transversale), aussi récente qu'elle soit, ne pourrait que commettre une erreur d'évaluation. Si l'évolution favorable constatée dans le passé se poursuit dans l'avenir, l'erreur ainsi commise entraînerait des pertes importantes pour la compagnie d'assurance. La commercialisation des rentes viagères ne peut donc se faire que si l'actuaire dispose de tables de mortalité projetées, incorporant l'évolution présumée de la durée de la vie humaine.

La question est tout aussi cruciale pour les pensions de retraite relevant des régimes légaux: dans l'évaluation des coûts de ces régimes, il est essentiel de tenir compte de l'évolution future présumée de la mortalité. Bien entendu, la plupart de ces régimes fonctionnant (tout au moins partiellement) en répartition, il faudra dans ce cas effectuer des projections de la population, tenant compte des taux d'activité. Cet exercice, auquel se sont livrés INS, BFP et Communauté Scientifique (1996) est donc bien plus ambitieux que la seule projection de la mortalité.

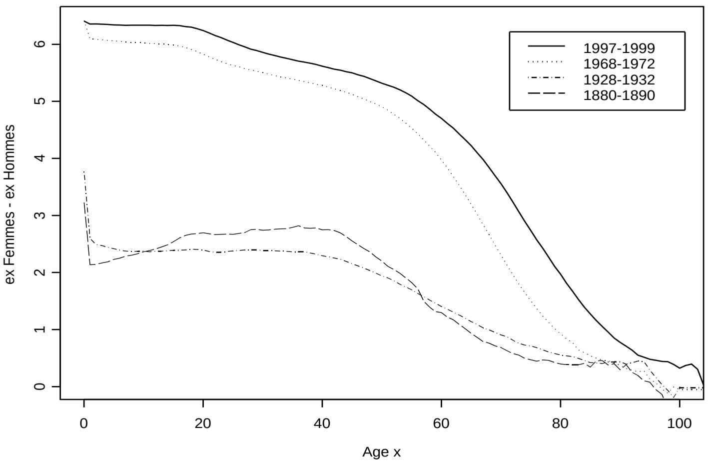

Figure 18: *Différence des espérances de vie* $e_x^{femme} - e_x^{homme}$ *en fonction de l'âge* x.

Période	Hommes	Femmes
1880-1890	7.677	8.254
1928-1932	8.152	8.827
1946-1949	8.669	9.579
1959-1963	8.721	10.137
1968-1972	10.375	10.375
1979-1982	9.009	11.226
1988-1990	9.630	11.924
1991-1993	9.896	12.162
1994-1996	10.277	12.527
1997-1999	10.506	12.665

Table 6: Evolution du prix a_{65} d'une rente viagère à 65 ans telle que reflétée par les tables INS 1880-1890 à 1997-1999.

Néanmoins, la projection de la mortalité n'en demeure pas moins un ingrédient essentiel de ces projections plus globales.

Au terme de cette première partie de l'étude, nous pensons donc être arrivé à nos fins: à ce stade, le lecteur devrait avoir pris conscience du caractère mouvant de la mortalité, et être convaincu de la nécessité de développer de nouvelles bases tarifaires, intégrant l'évolution de la durée de la vie humaine. Ce sera précisément là l'objet de la suite de notre travail.

Annexe

A Confrontation de l'hypothèse (4) à l'alternative classique de répartition uniforme des décès dans l'année

A.1 Distribution uniforme des décès sur l'année - interpolation linéaire

Lors des travaux empiriques, il est souvent supposé que les décès sont uniformément distribués entre deux âges entiers x et $x+1$ (en moyenne, les décès se produisent donc en milieu d'année). Cette hypothèse est acceptable pour autant que d_x est petit par rapport à ℓ_x; il faut donc parfois s'en méfier, surtout aux âges très faibles et très élevés. Ceci revient à considérer que les fonctions $t \mapsto \ell_{x+t}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, sont linéaires sur $[0, 1]$, i.e.

$$\ell_{x+t} = \ell_x + t(\ell_{x+1} - \ell_x), \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

Dès lors, on obtient sans peine

$$\begin{aligned}
L_x &= \frac{1}{2}(\ell_x + \ell_{x+1}) \\
&= \ell_x - \frac{1}{2}(\ell_x - \ell_{x+1}) \\
&= \ell_x - \frac{d_x}{2} \\
T_x &= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \int_{\xi=x+k}^{x+k+1} \ell_\xi d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \frac{\ell_{x+k} + \ell_{x+k+1}}{2} \\
&= \frac{\ell_x}{2} + \sum_{k=1}^{\omega-x-1} \ell_{x+k} \\
m_x &= \frac{2q_x}{2-q_x} = \frac{d_x}{\ell_x - \frac{d_x}{2}} = \frac{d_x}{\frac{1}{2}(\ell_x + \ell_{x+1})} \\
q_x &= \frac{2m_x}{2+m_x}.
\end{aligned}$$

L'hypothèse de distribution uniforme des décès sur l'année est en fait équivalente à

$$_tq_x = tq_x, \;\; 0 \leq t \leq 1, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Si on suppose $\xi \mapsto \ell_\xi$ linéaire sur $(x, x+t)$, $t > 1$, hypothèse acceptable tant que $_td_x$ est petit par rapport à ℓ_x, on a

$$_tL_x = \frac{t}{2}(\ell_x + \ell_{x+t}) \text{ et } {_tm_x} = \frac{2_td_x}{t(\ell_x + \ell_{x+t})}.$$

Comme $\ell_{x+t} = \ell_x(1 - {_tq_x})$, $_tm_x$ et $_tq_x$ sont approximativement liés par les formules

$$_tm_x \approx \frac{2_tq_x}{t(2 - {_tq_x})} \text{ et } {_tq_x} \approx \frac{2t_tm_x}{2 + t_tm_x}.$$

Examinons brièvement les conséquences techniques de l'hypothèse (9). Pour ce faire, introduisons la variable aléatoire K_x mesurant le nombre d'années entières de survie d'une personne ayant atteint l'âge x, i.e.

$$K_x = \lfloor T_x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} | T_x \geq n\}.$$

Définissons également S_x comme la fraction d'année que vivra cette personne au-delà de ces K_x années, i.e.

$$U_x = T_x - K_x.$$

La distribution de K_x se déduit de la table de mortalité de la manière suivante

$$\Pr[K_x = k] = \Pr[k \leq T_x < k+1] = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x.$$

Les taux instantanés de mortalité sous (9) sont donnés par

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x = \frac{q_x}{1 - tq_x}, \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

Comme pour tout entier x, k et $t \in [0,1]$ on a

$$\Pr[U_x \leq t | K_x = k] = \frac{\Pr[k < T_x \leq k+t]}{P[k < T_x \leq k+1]} = \frac{{}_kp_x(1 - {}_tp_{x+k})}{{}_kp_x(1 - p_{x+k})} = \frac{{}_tq_{x+k}}{q_{x+k}} = t$$

on voit que (9) revient à supposer que les variables K_x et U_x sont indépendantes et que U_x est distribuée uniformément sur $[0,1]$, puisque

$$P[U_x \leq t | K_x = k] = P[U_x \leq t] = t, \;\; 0 \leq t \leq 1.$$

Remarque A.1. *On trouve encore dans la littérature une hypothèse très voisine de celle décrite ci-dessus, connue sous le nom d'hypothèse de Balducci; celle-ci postule*

$${}_{1-t}q_{x+t} = (1-t)q_x, \;\; 0 \leq t \leq 1, \tag{10}$$

Sous (10)*, il vient pour x entier et $t \in [0,1[$*

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \frac{p_x}{{}_{1} - tp_{x+t}} = \frac{p_x}{1 - (1-t)q_x} = \frac{p_x}{p_x + tq_x} \\ {}_tq_x &= 1 - {}_tp_x = \frac{q_x}{p_x + tq_x} \\ \mu_{x+t} &= -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x = \frac{q_x}{p_x + tq_x}. \end{aligned}$$

L'hypothèse de Balducci produit donc des taux instantanés de mortalité qui décroissent entre deux âges entiers successifs, ce qui la rend évidemment critiquable. Sous (10) *les variables U_x et K_x ne sont pas indépendantes puisque*

$$\Pr[U_x \leq t | K_x = k] = \frac{{}_tq_{x+k}}{q_{x+k}} = \frac{t}{p_{x+k} + tq_{x+k}}.$$

Nous ne considérerons plus cette hypothèse dans la suite.

A.2 Constance des taux de mortalité sur l'année - interpolation exponentielle

Sous (4), les variables U_x et K_x ne sont pas indépendantes. En effet,

$$\Pr[U_x \leq t | K_x = k] = \frac{1 - p_{x+t}^k}{1 - p_{x+k}}.$$

Etant donné $K_x = k$, U_x a une loi exponentielle tronquée en $t = 1$ dont le paramètre p_{x+k} dépend de k. L'hypothèse (4) permet d'estimer sans difficulté les probabilités de survie. En effet, si les taux instantanés de mortalité sont constants par morceaux, i.e.

$$\mu_x = \begin{cases} c_1 \text{ pour } x \in [0, x_1[\\ c_2 \text{ pour } x \in [x_1, x_2[\\ \quad \vdots \\ c_{k-1} \text{ pour } x \in [x_{k-2}, x_{k-1}[\\ c_2 \text{ pour } x \geq x_{k-1} \end{cases}$$

on obtient alors

$${}_xp_0 = \begin{cases} \exp\{-c_1 x\} \text{ pour } x \in [0, x_1[\\ \exp\{-c_1 x_1 - c_2(x - x_1)\} \text{ pour } x \in [x_1, x_2[\\ \quad \vdots \\ \exp\{-c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) - \ldots - c_k(x - x_{k-1})\} \text{ pour } x \geq x_{k-1}. \end{cases}$$

Remarque A.2. *Il est intéressant de noter que lorsque ${}_kq_x \to 0$, (10) et (4) redonnent (9). Sous (10) et (4), S_x est approximativement distribuée selon la loi uniforme sur $[0, 1]$ et indépendante de K_x lorsque ${}_kq_x$ est petit.*

Notez également que sous les trois hypothèses examinées ci-dessus, les taux de mortalité présentent des sauts de discontinuité à tous les âges entiers.

A.3 Comparaison des hypothèses

Le choix d'une des hypothèses (9) et (4) n'est pas innocent, comme le montre le résultat suivant. Notons $T_x^{(1)}$ et $T_x^{(2)}$ la durée de vie restante d'un assuré d'âge x sous les hypothèses (9) et (4), respectivement. Si $k = [t]$ et $\epsilon = t - k$, on a quel que soit l'âge x entier

$$\begin{aligned} \Pr[T_x^{(1)} \leq t] &= 1 - \Pr[T_x^{(1)} > k + \epsilon] \\ &= 1 - \Pr[K_x = k] \Pr[U_x > \epsilon | K_x = k] - \Pr[K_x \geq k + 1] \\ &= 1 - ({}_kp_x - {}_{k+1}p_x)(1 - \epsilon) - {}_{k+1}p_x \\ &= 1 - {}_kp_x(1 - \epsilon) + {}_{k+1}p_x(1 - \epsilon) - {}_{k+1}p_x \\ &= 1 - {}_kp_x(1 - \epsilon) - \epsilon_{k+1}p_x \\ &= 1 - {}_kp_x(1 - \epsilon + \epsilon p_{x+k}) \\ &= 1 - {}_kp_x(1 - \epsilon q_{x+k}). \end{aligned}$$

De la même façon, quel que soit x entier,

$$\Pr[T_x^{(2)} \leq t] = 1 - {}_kp_x(p_{x+k})^\epsilon.$$

Hürlimann (1990) a obtenu le résultat suivant.

Proposition A.3. *Dans les notations introduites ci-dessus,*

$$\Pr[T_x^{(2)} > t] \leq \Pr[T_x^{(1)} > t] \text{ quel que soit } t \in \mathbb{R}^+.$$

Proof. Si t est entier alors on a de manière évidente

$$\Pr[T_x^{(1)} \leq t] = \Pr[T_x^{(2)} \leq t].$$

Supposons donc t non entier et notons comme ci-dessus $k = [t]$ et $\epsilon = t - k$. Il faut montrer que

$$1 - {}_k p_x (1 - \epsilon q_{x+k}) \leq 1 - {}_k p_x (p_{x+k})^{\epsilon}.$$

Ceci revient à prouver l'inégalité

$$1 - \epsilon + \epsilon p_{x+k} \geq (p_{x+k})^{\epsilon}$$

laquelle découle directement du résultat suivant, classique en analyse, selon lequel

$$(1 + z)^{\alpha} < 1 + \alpha z \text{ pour tout } z > -1, \;\; z \neq 0 \text{ et } 0 < \alpha < 1.$$

En posant $z = p_{x+k} - 1$ et $\alpha = \epsilon$ on obtient l'inégalité annoncée. □

Il vient pour les durées de vie moyennes restantes (en notations évidentes)

$$e_x^{(2)} \leq e_x^{(1)}.$$

Interprétons à présent ces résultats, en nous basant sur Hürlimann (1990), corrigé par Kling & Wolthuis (1992) et Kling (1993). Pour cela distinguons les opérations en cas de vie et en cas de décès.

L'hypothèse de constance des taux de mortalité est celle qui donne la plus petite durée de survie. Pour des opérations en cas de vie, c'est donc celle qui engendrera la prime unique pure la plus faible et elle représentera la démarche la moins conservatrice. Ensuite vient l'interpolation linéaire qui est donc plus sûre (puisqu'elle fournit une prime unique plus élevée).

Pour des opérations en cas de décès par contre, c'est l'hypothèse de constance des taux qui engendre la prime unique pure la plus élevée (car les assurés ont tendance à vivre moins longtemps sous cette hypothèse). C'est donc elle qui représente la démarche la plus conservatrice.

Bien que nous intéressons à des rentes viagères, nous avons retenu l'hypothèse de constance par morceaux des taux de mortalité, pour des raisons liées aux techniques de projection de la mortalité utilisées dans la suite de l'étude. En pratique, l'impact réel du passage d'une hypothèse à l'autre sur les primes uniques pures des rentes est très limité.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier chaleureusement les Fonds Spéciaux de Recherche de l'Université catholique de Louvain pour leur support financier.

Les auteurs tiennent à remercier les membres du Groupe de Travail "Mortalité" de l'ARAB, présidé par Monsieur Philippe Delfosse. Les intéressantes discussions avec les professionnels de l'assurance lors des réunions de ce groupe ont motivé la présente étude.

Les auteurs ont bénéficié du soutien précieux du Professeur Christian Jaumain, Président de l'Ecole d'Actuariat de l'Université catholique de Louvain, ainsi que du Professeur Josianne Duchêne, de l'Institut de Démographie de cette même université. Ils remercient également le Professeur Ermanno Pitacco du Département de Mathématique Appliquée et d'Actuariat de l'Université Degli Studi de Trieste (Italie), le Professeur Annamaria Olivieri du Département d'Economie de l'Université de Parme (Italie), et les Professeurs Steven Haberman et Richard Verrall, de la City University londonienne. Enfin, le concours de Mademoiselle Amélie Louis pour la récolte et la préparation des données a été précieux.

Les auteurs assument bien sûr seuls l'entière responsabilité des erreurs éventuelles subsistant dans leurs écrits.

Références

Actuarial Education Service (1995). *Actuarial Mathematics - Subject D2.* The Faculty and Institute of Actuaries, Oxford, Edinburgh.

Benjamin, B., & Pollard, J.H. (1993). *The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics (3d Edition).* Heinemann, London.

Benjamin, B., & Soliman, A.S. (1993). *Mortality on the Move.* Institute of Actuaries, Oxford.

Brown, R.L. (1997). Issues in the modelling of mortality at advanced ages. Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo, Research Report 97-05.

Chiang, C.L. (1984). *The Life Table and Its Applications.* R.E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida.

CMIR (1990). *Continuous Mortality Investigation Report Number 10.* Institute and Faculty of Actuaries.

CMIR (1999). *Continuous Mortality Investigation Report Number 17.* Institute and Faculty of Actuaries.

Coppola, M., Di Lorenzo, E., & Sibillo, M. (2000). Risk sources in a life annuity portfolio: decomposition an measurement tools. *Journal of Actuarial Practice* **8**, 43-61.

Denuit, M. (1999). Bases techniques de l'assurance-vie individuelle en Belgique. *Revue Générale des Assurances et des Responsabilités* **72(4)**, 13078/1-13078/11.

Denuit, M., & Cornet, A. (1999). Premium calculation with dependent time-until-death random variables: the widow's pension. *Journal of Actuarial Practice* **7**, 147-180.

Gockel, S. (2000). *Elaboration d'une Méthodologie de Construction de Tables de Mortalité Prospectives Belges.* Mémoire présenté en vue de l'obtention du DES en sciences actuarielles à l'Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

Grimmeau, J.-P. (2000). *Démographie (Volume I).* Presses Universitaires de Bruxelles.

Heligman, L., & Polard, J.H. (1980). The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries* **107**, 49-80.

Hürlimann, W. (1990). On life table applications of ordering risks *Insurance: Mathematics & Economics* **9**, 277-279.

Institut National de Statistique, Bureau Fédéral du Plan & Communauté scientifique (1996). *Perspectives de Population 1995-2050.* Institut National de Statistique, Ministère des Affaires Economiques, Bruxelles.

Jaumain, Ch. (2001). Tables de mortalité en Belgique: questions d'actualité. *Actu-L* **1**, 67-108.

Kinsella, K., & Gist, Y.J. (1998). Gender and aging: Mortality and Health. *International Brief* **98-02** US Bureau of the Census.

Keyfitz, N. (1985). *Applied Mathematrical Demography.* Springer Verlag, New York.

Kling, B. (1993). *Life Insurance: A Non-Life Approach.* Thesis Publishers, Amsterdam.

Kling, B., & Wolthuis, H. (1992). Ordering of risks in life insurance. *Insurance: Mathematics & Economics* **11**, 139-152.

Lambrecht, M. (1997). Le vieillissement démographique: de l'analyse des évolutions de population au risque de conclusions hâtives. *Planning Paper* **81**, Bureau Fédéral du Plaan, Bruxelles.

Lambrechts, K. (2000). Document de travail du Groupe Mortalité de l'ARAB.

Lee, R.D. (2000). The Lee-Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal* **4**, 80-93.

Lemaire, J. (2001). Why do females live longer than males? *Belgian Actuarial Bulletin* **1**, 1-9.

Leridon, H., & Toulemon, L. (1997). *Démographie.* Economica, Paris.

Louis, A. (2001). *Etablissement de Tables de Mortalité Prospectives.* Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Licencié en Sciences Mathématiques à l'Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.

Marocco, P., & Pitacco, E. (1998). Longevity risk and life annuity reinsurance. *Transactions of the 26th International Congress of Actuaries*, Birmingham, 453-479.

McDonald, A.S. (1997) Editor. *The Second Actuarial Study of Mortality in Europe.* Groupe Consultatif des Associations d'Actuaires des Pays des Communautés Européennes, Oxford.

McDonald, A.S., Cairns, A.J.C., Gwilt, P.L., & Miller, K.A. (1998). An international comparison of recent trends in mortality. *British Actuarial Journal* **4**, 3-141.

Menthonnex, J., & Wanner, Ph. (1998). *Tables de Mortalité Longitudinales pour la Suisse (Générations 1880-1980).* Office Fédéral de la Statistique, Berne.

Olivieri, A. (1999). Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective. *Proceedings of the 3d International Congress on Insurance: Mathematics & Economics*, London.

Olivieri, A., & Pitacco, E. (1999). Funding sickness benefits for thye elderly. *Proceedings of the 30th ASTIN Colloquium*, Tokyo, 135-155.

Olivieri, A., & Pitacco, E. (2000). Solvency requirements for life annuities. *Proceedings of the AFIR 2000 Colloquium*, Tromso, Norway, 547-571.

Olivieri, A., & Pitacco, E. (2001). Facing LTC risks. *Paper presented at the 5th International Congress on Insurance: Mathematics & Economics*, Penn State, July 2001.

Pitacco, E. (2001). Assessing and facinf the longevity risk: Financial requirements. *Proceedings of the 4th Italian-Spanish Conference on Financial Mathematics*, Alghero

Poh, S.B., & Brown, R.L. (1995). Methods of projection of fertility and mortality rates. Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo, Research Report 95-13.

Renshaw, A.E., & Haberman, S. (1996). The modelling of recent mortality trends in the United Kingdom male assured lives. *British Actuarial Journal* **2**, 449-477.

Renshaw, A.E., & Haberman, S. (2001). On the forecasting of mortality reduction factors. Actuarial Research Paper **135**, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London.

SCHRYVERS, J. (2000). *Le Tour des Tables pour l'An 2000.* Kluwer, Bruxelles.

SITHOLE, T.Z., HABERMAN, S., & VERRALL, R.J. (2000). An investigation into parametric models for mortality projections, with applications to immediate annuitants and life office pensioners' data. *Insurance: Mathematics & Economics* **27**, 285-312.

VALLIN, J. (1973). *La Mortalité par Génération en France depuis 1899.* INED, Paris.

VANDESCHRICK, CH. (1995). *Analyse Démographique.* Academia Bruylant & L'Harmattan, Louvain-la-Neuve & Paris.

VAUPEL, J.W. (1997). Trajectory of mortality at advances ages. In *Between Zeus and the Salmon: The Biodemography of Longevity*, pp. 17-37, National Academy of Science.

WANG, S.S., & BROWN, R.L. (1998). A frailty model for projection of human mortality improvements. *Journal of Actuarial Practice* **6**, 221-241.

WILMOTH, J.R. (1997). In search of limits. In *Between Zeus and the Salmon: The Biodemography of Longevity*, pp. 38-64, National Academy of Science.

WILMOTH, J.R., DEEGAN, L.J., LUNDSTRÖM, H., & HORIUCHI, S. (2000). Increase of maximum life-span in Sweden, 1861-1999. *Science* **289**, 2366-2369.

YAARI, M.E. (1965). Uncertain lifetime, life insurance and the theory of the consumer. *Review of Economic Studies* **32**.