Une amélioration de l'algorithme des échéances moyennes de C. Jaumain à partir du théorème d'immunisation de Fisher-Weil

by

P. Ars* **and J. Paris****

Abstract

Le but de cet article est de montrer qu'il existe un lien entre les algorithmes de recherche du taux d'intérêt d'une opération financière, le plus célèbre étant à juste titre celui des échéances moyennes du Professeur Christian Jaumain, et la théorie de l'immunisation du portefeuille à travers le théorème de Fisher-Weil.

Mots-clef: algorithme de Jaumain, algorithme des échéances moyennes, algorithme de De Vylder, immunisation, théorème de Fisher-Weil, duration, calcul du taux d'intérêt, optimisation, algorithme de Newton-Raphson.

* Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.
**Institut de Statistique and CORE, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve. Research support from the contract "Projet d'Actions de Recherche Concertées" no. 93/98-164 is gratefully acknowledged.

Introduction

L'exercice typique dans le cadre des mathématiques financières consiste à calculer le taux d'intérêt *actuariel* d'une opération financière. On désire trouver le taux d'intérêt (noté comme d'habitude i) permettant d'égaler les valeurs actuelles de deux capitemps, c'est-à-dire de deux flux positifs, l'un représentant les débours (de l'assureur) et l'autre, les rentrées financières. Lorsque l'on considère le facteur d'actualisation (v) comme inconnue, le problème se ramène à l'extraction d'une racine (réelle) d'une équation souvent de degré supérieur à 4, racine dont on ne connait généralement pas l'expression algébrique. Dans beaucoup de situations pratiques, on a de bonnes raisons de penser qu'il existe une et une seule racine réelle. Il est alors naturel d'envisager une méthode de résolution numérique de telles équations. Dans cette voie, deux professeurs de l'Institut des Sciences Actuarielles de Louvain-La-Neuve se sont particulièrement distingués.

L'algorithme des échéances moyennes (4) a acquis une notoriété internationale, grâce à la qualité, la plupart du temps exceptionnelle, de sa première itération. Cette méthode a été analysée par H.U. Gerber (4) qui lui a donné le nom de son auteur: la méthode Jaumain.

Le seul mais léger défaut de la méthode Jaumain réside dans la rapidité de la convergence *lorsque* l'on est proche de la solution et que l'on la compare à des méthodes plus traditionnelles, comme par exemple la méthode de Newton-Raphson.

Se basant sur un raisonnement purement mathématique, De Vylder 4 a obtenu un algorithme plus performant. Celui-ci ajoute à une première estimation du taux d'intérêt égale à celle obtenue via la méthode Jaumain la rapidité de convergence de la méthode de Newton-Raphson lorsque l'on est près de la solution.

La méthode Jaumain repose sur une utilisation astucieuse de la notion d'*échéance moyenne* dont voici la définition: soit un capitemps ($C \doteq \sum_{k=1}^{s} (C_k, s_k)$[1]. L'échéance moyenne de ce capitemps est l'instant ρ tel que les deux capitemps C et $\sum_{k=1}^{s} C_k, \rho)$ ont les mêmes valeurs actuelles. Cette notion dépend évidemment du taux d'intérêt considéré. Les financiers utilisent, dans la théorie de l'immunisation, une notion plus stable: la duration (voir 4). L'idée de base de l'algorithme que nous présentons est de considérer la duration au lieu de l'échéance moyenne. La construction repose sur le théorème d'immunisation de Fisher-Weil. Ce dernier stipule que si, pour un taux d'intérêt i, les valeurs actuelles de deux capitemps C

[1] Comme d'habitude, cette notation signifie un flux de paiements de valeurs $(C_k, k \geq 1)$ aux instants respectifs $(s_k, k \geq 1)$.

et D sont égales à l'instant 0, alors la variation entre les valeurs actuelles de ces deux capitemps sera faible lorsque le taux d'intérêt subit une petite variation $\Delta\, i$, **si** les durations des deux flux financiers sont égales.

Dans la suite de cet article, nous utiliserons les notations habituelles i, v, u et δ.

1 Les algorithmes de recherche de taux d'intérêt

Nous décrivons brièvement ici les algorithmes de recherche de taux d'intérêt de Newton-Raphson, Jaumain(1979) et De Vylder (1979).

Soient deux capitemps ($C \doteq \sum_{k=1}^{s} (C_k, s_k) et D \doteq \sum_{k=1}^{t} (D_k, t_k)$). Leurs valeurs actuelles, notées respectivement $V_C\, et\, V_D$, sont alors données par:

1. $V_C = \sum_{k=1}^{s} C_k\, v^{s_k}$;
2. $V_D = \sum_{k=1}^{t} D_k\, v^{t_k}$.

Le problème est alors le suivant: quel est le taux d'intérêt i qui égalise les valeurs actuelles des deux capitemps? Bien sur, en général, rien n'en assure l'existence, ni même l'unicité. Remarquons néanmoins que ceci est vérifié dans beaucoup de situations pratiques (voir 4, 4, 4).

1.1 Algorithme de Newton-Raphson

Le problème revient à trouver le taux d'intérêt i ou ce qui est équivalent le facteur d'actualisation v qui assure l'égalité des deux fonctions infiniment dérivables $V_C\, et\, V_D$ (ce sont presque des polynômes). Dans ce cas, une méthode qui donne de très bons résultats dès que l'on prend une valeur initiale *proche* de la solution est la méthode de Newton-Raphson. Celle-ci se base sur l'algorithme suivant:
Désignons par $f(v)$ la fonction de v:

$$f(v) = V_C - V_D.$$

L'objectif est de trouver une racine de l'équation:

$$f(v) = 0. \tag{1.1}$$

L'algorithme de Newton-Raphson fournit alors les itérés suivants à partir de la valeur initiale v_0 choisie:

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(v_n)}{\frac{df(v_n)}{dv}}. \tag{1.2}$$

Remarques:

i) La valeur initiale v_0 doit être choisie *proche* de la solution afin d'assurer la convergence (voir par exemple [**?**, p. 78]).

ii) On constate immédiatement que si la suite $(v_n, n \geq 0)$ converge, disons vers v_∞, alors v_∞ est solution de l'équation:

$$f(v) = 0.$$

iii) La convergence de la méthode est d'ordre quadratique: si ϵ_n désigne l'erreur à l'étape n ($\epsilon_n = v_n - v_\infty$), alors pour n_0 assez grand, il existe une constante M t.q.:

$$\forall n \geq n_0 : \epsilon_{n+1} \leq M\, \epsilon_n^2.$$

Cette propriété de convergence quadratique est souvent présentée de la manière intuitive suivante: le nombre de décimales correctes double à chaque itération.

1.2 Algorithme de Jaumain ou des échéances moyennes

Notations[2]:

$$C = \sum_{k=1}^{s} C_k;$$

$$D = \sum_{k=1}^{t} D_k.$$

L'idée remarquable qui conduit à cet algorithme est la suivante: supposons que chacun des deux capitemps C et D se résume à un seul montant payable aux instants s pour C et t pour D: ($C = (C, s)$ *et* $D = (D, t)$). Dès lors, le facteur d'actualisation v s'obtient facilement comme solution de l'équation:

$$C\, v^s = D\, v^t;$$

ce qui donne:

$$v = \left(\frac{D}{C}\right)^{-\frac{1}{t-s}}.$$

[2]Nous adoptons la même notation pour le capitemps et pour la somme des capitaux qui le composent ; ceci ne devrait évidemment entraîner aucune confusion.

Dès lors, on remplace les deux capitemps C et D par des capitemps de valeurs actuelles *égales* composés d'une somme C (resp. D) et d'une seule échéance appelée *échéance moyenne* notée, disons, ρ (resp. σ). On applique ensuite la formule:

$$v = \left(\frac{D}{C}\right)^{-\frac{1}{\sigma-\rho}}. \tag{1.3}$$

Plus précisément, l'algorithme consiste à:

étape 1: définir les valeurs ρ_1 *et* σ_1:

$$\rho_1 = \frac{\sum_{k=1}^{s} C_k\, s_k}{C};$$

$$\sigma_1 = \frac{\sum_{k=1}^{t} D_k\, t_k}{D}.$$

Ceci conduit à l'estimation suivante de v_1:

$$v_1 = \left(\frac{D}{C}\right)^{-\frac{1}{\sigma_1-\rho_1}}. \tag{1.4}$$

étape 2: calculer ensuite pour chaque $n \geq 1$:

$$\rho_{n+1} = -\frac{1}{ln(u_n)}\, ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{s} C_k v_n^{s_k}}{C}\right); \tag{1.5}$$

$$\sigma_{n+1} = -\frac{1}{ln(u_n)}\, ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{t} D_k v_n^{t_k}}{D}\right); \tag{1.6}$$

La valeur v_{n+1} s'obtient alors par:

$$v_{n+1} = \left(\frac{D}{C}\right)^{-\frac{1}{\sigma_{n+1}-\rho_{n+1}}}. \tag{1.7}$$

On continue ainsi de suite...

Remarques:

i) La deuxième étape n'est en fait qu'un cas particulier de la première: en effet, si l'on prend dans cette seconde étape une valeur initiale nulle de i, un passage à la limite nécessitant l'emploi du théorème de L'Hospital permet alors de trouver le premier itéré v_1.

ii) L'algorithme converge *en général* vers la plus petite des solutions. Ceci est le cas par exemple dans la situation souvent rencontrée où $s = 1$ et $D > C$. Lorsque l'on prend une autre valeur initiale, l'algorithme converge à nouveau *en général* vers la solution la plus proche. Dans certains cas, essentiellement pathologiques, l'algorithme peut ne pas converger (il suffit par exemple de construire un exemple pour lequel $D > C$ et pour lequel l'exposant de $(\frac{D}{C})$ devient très grand).

iii) Si la suite des $(v_n, n \geq 1)$ converge alors elle converge vers une solution.

iv) La qualité de la première itération est remarquable, comme nous le verrons dans les exemples numériques.

v) Par rapport à la méthode de Newton-Raphson, la convergence n'est cependant plus d'ordre quadratique mais seulement linéaire (voir [**?**, p. 88-90] et [**?**, p.70-76]).

vi) L'algorithme de Jaumain a été redécouvert par Gerber(1986) via un raisonnement probabiliste reposant sur l'inégalité de Jensen.

1.3 Algorithme de De Vylder

De Vylder(1979) considère l'équation suivante équivalente à l'équation [**?**]:

$$h(v) = 1$$

avec

$$h(v) = \frac{V_C}{V_D}.$$

Son algorithme peut être décrit de la manière suivante:

i) On prend $v_0 = 0.95$.

ii) Pour $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = v_n \, exp\left(-\frac{h(v_n)\, ln(h(v_n))}{v_n \frac{dh(v_n)}{dv}}\right). \tag{1.8}$$

Remarques:

i) Si on prend 1 comme valeur initiale du facteur d'actualisation, on retrouve la première itération de l'algorithme de Jaumain.

ii) La vitesse de convergence est quadratique. Notons, pour l'explication, ϵ_n^{DV} (resp. ϵ_n^{NR}) les erreurs à l'étape n pour l'algorithme de De Vylder (resp. l'algorithme de Newton-Raphson):

$$\epsilon_n^{DV} = v_n^{DV} - v_\infty;$$

$$\epsilon_n^{NR} = v_n^{NR} - v_\infty;$$

alors,

$$lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon_n^{DV}}{\epsilon_n^{NR}} = 1.$$

Ceci s'explique aisément par le raisonnement suivant: si on applique la méthode de Newton-Raphson à la résolution de l'équation:

$$ln\, h(v) = 0,$$

on trouve que les itérés satisfont la relation:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n - \frac{h(v_n)\, ln(h(v_n))}{\frac{dh(v_n)}{dv}} \\ &= v_n \left(1 - \frac{h(v_n)\, ln(h(v_n))}{v_n \frac{dh(v_n)}{dv}}\right), \end{aligned}$$

pratiquement équivalente à la relation [**?**] quand on est proche de la solution.

2 Le théorème de Fisher-Weil

La théorie de l'immunisation des portefeuilles peut être décrite de la manière suivante: soient C et D deux capitemps ayant, pour un taux d'intérêt i, les mêmes valeurs actuelles. Ces deux capitemps sont sensés représenter d'une part les flux positifs pour la compagnie d'assurance (rentrée de primes, produits financiers,...) et et d'autre part les débours de la compagnie (paiements des sinistres). L'équilibre financier n'est évidemment obtenu que sous la contrainte que le taux d'intérêt i ne variera pas dans le futur. On sait cependant que tel n'est pas le cas. Il est dès lors important pour la compagnie de s'immuniser contre les variations du taux d'intérêt.

L'objectif de la théorie de l'immunisation est alors la réponse à la question suivante: quelles contraintes doit-on imposer sur les deux capitemps,

pour qu'une variation des taux d'intérêt n'influence que peu l'équilibre entre les valeurs actuelles des deux flux? La réponse à cette question repose sur la notion de duration:

Définition 1 (Duration) *Soit* $(C \doteq \sum_{k=1}^{s} (C_k, s_k))$ *un capitemps. Désignons par* V_C *sa valeur actuelle:*

$$V_C = \sum_{k=1}^{s} C_k v^{s_k}.$$

La duration de C est la quantité D_C *définie par:*

$$D_C \doteq -u \frac{\frac{dV_C}{di}}{V_C} \tag{2.1}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{s} C_k \, s_k \, v^{s_k}}{V_C}. \tag{2.2}$$

La duration s'interprète comme une durée de vie moyenne du capitemps, les poids étant les capitaux actualisés. Son importance pour la théorie de l'immunisation est donnée par le théorème de Fisher-Weil.

Soit C un capitemps de valeur actuelle $(V_{C,i})$ calculée sur base d'un taux d'intérêt i. Supposons que le taux d'intérêt varie de Δi. Un raisonnement basé sur le développement de Taylor fournit immédiatement (en notant $(\tilde{i} = i + \Delta i)$):

$$V_{C,\tilde{i}} = V_{C,i} + O(\Delta i). \tag{2.3}$$

La considération maintenant de deux capitemps représentant les actifs et passifs permet dans l'équation [**?**] d'éliminer le terme dépendant de Δi pour ne garder que des termes d'ordre $(\Delta i)^2$. Ceci conduit au théorème suivant:

Théorème 1 (Fisher-Weil) *Soient deux capitemps C et D dont les valeurs actuelles respectives* $(V_{C,i}$ *et* $V_{D,i})$ *sont égales pour le taux d'intérêt* i*. Nous supposons que le taux d'intérêt subit, juste après l'instant 0, une variation* Δi*. Si les durations des deux capitemps* $(D_C$ *et* $D_D)$ *sont égales et si* $\tilde{i}$ *désigne le nouveau taux d'intérêt* $(\tilde{i} = i + \Delta i)$*, alors:*

$$V_{C,\tilde{i}} = V_{D,\tilde{i}} + O((\Delta i)^2). \tag{2.4}$$

3 Un algorithme généralisé des échéances moyennes

Nous montrons dans cette section que le théorème de Fisher-Weil cité dans la section précédente conduit à une méthode qui généralise l'algorithme des échéances moyennes de C. Jaumain et qui constitue une nouvelle dérivation de la méthode de De Vylder.

L'essentiel de la méthode repose sur l'observation connue suivante:

Proposition 1 *Soit C un capitemps de valeur actuelle $V_{C,i}$ et de duration $D_{C,i}$. Supposons que le taux d'intérêt i varie de Δi (le nouveau taux d'intérêt est $\tilde{i} = i + \Delta i$). Alors:*

$$V_{C,\tilde{i}}\,\tilde{u}^{D_{C,i}} = V_{C,i}\,u^{D_{C,i}} + O((\Delta i)^2). \tag{3.1}$$

Considérons maintenant deux capitemps C et D. Nous supposons ici qu'il existe un et un seul taux d'intérêt i égalant les valeurs actuelles de ces deux capitemps. Si, dans l'équation [**?**], $\tilde{i}$ est le taux d'intérêt recherché ($V_{C,\tilde{i}} = V_{D,\tilde{i}}$), il vient immédiatement que:

$$\frac{V_{C,\tilde{i}}\,\tilde{u}^{D_{C,i}}}{V_{C,i}\,u^{D_{C,i}}} \simeq \frac{V_{D,\tilde{i}}\,\tilde{u}^{D_{D,i}}}{V_{D,i}\,u^{D_{D,i}}}; \tag{3.2}$$

dès lors,

$$\tilde{u}^{D_{C,i}-D_{D,i}}V_{D,i} \simeq u^{D_{C,i}-D_{D,i}}V_{C,i}. \tag{3.3}$$

L'équation [**?**] conduit alors à l'algorithme suivant:

$$v_{n+1} = v_n \left(\frac{V_{C,i_n}}{V_{D,i_n}}\right)^{-\frac{1}{D_{C,i_n}-D_{D,i_n}}}. \tag{3.4}$$

Interprétation: La formule [**?**] peut être réécrite sous une forme qui permet une meilleure comparaison avec l'algorithme de Jaumain. Nous adoptons pour cela les notations suivantes:

$$\bar{V}_{C,i_n} \doteq V_{C,i_n}\,u_n^{D_{C,i_n}};$$

$$\bar{V}_{D,i_n} \doteq V_{D,i_n}\,u_n^{D_{D,i_n}}.$$

La valeur $\bar{V}_{D,i_n}$ représente le capital disponible à l'instant D, i_n dont la valeur actuelle vaut V_{C,i_n}.

$$v_{n+1} = v_n \left(\frac{V_{C,i_n}}{V_{D,i_n}} \right)^{-\frac{1}{D_{C,i_n} - D_{D,i_n}}} \tag{3.5}$$

$$= v_n \left(\frac{\bar{V}_{C,i_n} \, v_n^{D_{C,i_n}}}{\bar{V}_{D,i_n} \, v_n^{D_{D,i_n}}} \right)^{-\frac{1}{D_{C,i_n} - D_{D,i_n}}} \tag{3.6}$$

$$= \left(\frac{\bar{V}_{C,i_n}}{\bar{V}_{D,i_n}} \right)^{-\frac{1}{D_{C,i_n} - D_{D,i_n}}} . \tag{3.7}$$

On constate dès lors que l'algorithme que nous proposons suit le même schéma que l'algorithme de Jaumain mais où l'on considère la duration au lieu de l'échéance moyenne et où l'on actualise les montants à cet instant déterminé par la duration. On applique alors la formule 4.

Remarques:

i) L'algorithme construit est équivalent à celui de De Vylder, comme le montre une simple comparaison des formules [**?**] et [**?**].

ii) Si la suite $(v_n, n \geq 1)$ converge, alors la limite est solution de l'équation [**?**].

4 Exemples

Nous donnons ici plusieurs exemples qui permettent de comparer les différents algorithmes. Nous en considérons un de plus: l'algorithme de Newton-Raphson mais en prenant le premier itéré fourni par l'algorithme de Jaumain. Ce dernier donne alors des résultats similaires à ceux fournis par l'algorithme de Fisher-Weil.

Pour chacun des exemples nous donnons (au maximum) les dix premiers itérés (avec 12 décimales) de chacun des algorithmes. Nous poursuivons en donnant les erreurs **absolues** à chaque itération. Sauf indications contraires, nous prenons 0 comme valeur initiale de i.

Exemple 1:4
C=[99];
s=[0];
D=[7,7,7,7,7,25,25,25,25,26];

t=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10];

tableau 1: taux d'intérêt fournis par les 4 algorithmes

N-R	Jaumain	Jaumain +N-R	Fisher-Weil
0.036585365854	0.038131709172	0.038131709172	0.038131709172
0.074611668889	0.075339615738	0.075418055231	0.075436460443
0.075438115366	0.075436450045	0.075440201946	0.075440203431
0.075440203425	0.075440063374	0.075440203438	0.075440203438
0.075440203438	0.075440198211	0.075440203438	0.075440203438
0.075440203438	0.075440203243	0.075440203438	0.075440203438
0.075440203438	0.075440203431	0.075440203438	0.075440203438
0.075440203438	0.075440203438	0.075440203438	0.075440203438
0.075440203438	0.075440203438	0.075440203438	0.075440203438
0.075440203438	0.075440203438	0.075440203438	0.075440203438

tableau 2: erreurs absolues

N-R	Jaumain	Jaumain +N-R	Fisher-Weil
0.016560811225	0.002699405151	0.002699405151	0.002699405151
0.000828534549	0.000100587700	0.000022148207	0.000003742995
0.000002088072	0.000003753393	0.000000001493	0.000000000007
0.000000000013	0.000000140064	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000005227	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000000195	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000000007	0.000000000000	0.000000000000

Exemple 2
C=[10000,22310];
s=[3,1];
D=[25900,6392];
t=[2,0];

tableau 3: taux d'intérêt fournis par les 4 algorithmes

N-R	Jaumain	Jaumain +N-R	Fisher-Weil
0.036585365854	0.038131709172	0.038131709172	0.038131709172
0.056399663913	0.051429468559	0.057075231550	0.057456824448
0.063067478232	0.057428462019	0.063191471535	0.063291506279
0.063820573657	0.060420727302	0.063823309256	0.063825455841

0.063829785865	0.061985553294	0.063829786557	0.063829786950
0.063829787234	0.062823828646	0.063829787234	0.063829787234
0.063829787234	0.063278638964	0.063829787234	0.063829787234
0.063829787234	0.063527094320	0.063829787234	0.063829787234
0.063829787234	0.063663328109	0.063829787234	0.063829787234
0.063829787234	0.063738180694	0.063829787234	0.063829787234

tableau 4: erreurs absolues

N-R	Jaumain	Jaumain +N-R	Fisher-Weil
0.027244421380	0.025698078062	0.025698078062	0.025698078062
0.007430123321	0.012400318675	0.006754555684	0.006372962786
0.000762309002	0.006401325215	0.000638315699	0.000538280955
0.000009213577	0.003409059932	0.000006477979	0.000004331394
0.000000001369	0.001844233940	0.000000000677	0.000000000284
0.000000000000	0.001005958588	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000551148270	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000302692914	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000166459125	0.000000000000	0.000000000000

Exemple 3:4
C=[50,75,150,300];
s=[0,1,1.5,5];
D=[50,200,500];
t=[2,40/12,25/3];

tableau 5: taux d'intérêt fournis par les 4 algorithmes

N-R	Jaumain	Jaumain +N-R	Fisher-Weil
0.059154929577	0.080122833302	0.080122833302	0.080122833302
0.080510282273	0.082563381830	0.082620908620	0.082643913186
0.082628184519	0.082643875308	0.082646623834	0.082646626515
0.082646625138	0.082646535586	0.082646626518	0.082646626518
0.082646626518	0.082646623513	0.082646626518	0.082646626518
0.082646626518	0.082646626419	0.082646626518	0.082646626518
0.082646626518	0.082646626515	0.082646626518	0.082646626518
0.082646626518	0.082646626518	0.082646626518	0.082646626518

tableau 6: erreurs absolues

N-R	Jaumain	Jaumain +N-R	Fisher-Weil
0.023491696941	0.002523793216	0.002523793216	0.002523793216
0.002136344246	0.000083244688	0.000025717898	0.000002713332
0.000018441999	0.000002751210	0.000000002684	0.000000000003
0.000000001380	0.000000090933	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000003005	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000000010	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000000003	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000

Exemple 4:4
C=[120,120,120,120,120,120,120,120,1120];
s=[1,2,3,4,5,6,7,8,9];
D=[1100];
t=[0];

v(0)=0.99009900990099.

tableau 7: taux d'intérêt fournis par les 4 algorithmes

N-R	Jaumain	Jaumain +N-R	Fisher-Weil
0.078282946769	0.096934426258	0.078282946769	0.097433533736
0.100733930808	0.102112186228	0.100733930808	0.102448513559
0.102456461074	0.102442781533	0.102456461074	0.102465421064
0.102465421016	0.102463969891	0.102465421016	0.102465421256
0.102465421256	0.102465328212	0.102465421256	0.102465421256
0.102465421256	0.102465415291	0.102465421256	0.102465421256
0.102465421256	0.102465420874	0.102465421256	0.102465421256
0.102465421256	0.102465421232	0.102465421256	0.102465421256
0.102465421256	0.102465421254	0.102465421256	0.102465421256
0.102465421256	0.102465421256	0.102465421256	0.102465421256

tableau 8: erreurs absolues

N-R	Jaumain	Jaumain +N-R	Fisher-Weil
0.0294400860	0.006079277342	0.006079277342	0.006079277342
0.002559516979	0.000388103574	0.000110280431	0.000024646122
0.000019573417	0.000024873943	0.000000036368	0.000000000408
0.000000001146	0.000001594592	0.000000000000	0.000000000000

0.000000000000	0.000000102226	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000006553	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000000420	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000000027	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000000002	0.000000000000	0.000000000000
0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000

Références

1 De Vylder, F. (1979). Méthode itérative multiplicative de calcul d'une racine réelle, en particulier d'un taux d'intérêt. *Bulletin trimestriel de l'Institut des Actuaires Français.*, 316:109– 129.

2 Dieudonné, J. (1980). *Calcul infinitésimal.* Hermann, Paris.

3 Fisher, L. and Weil, R. (1971). Coping with the risk of interest rate fluctuations. *Journal of Business.*, 44:408– 431.

4 Gerber, H. (1986). Some moment inequalities and their applications. *Transactions of the Society of Actuaries.*, 38:75– 104.

5 Henrici, P. (1964). *Elements of Numerical Analysis.* Wiley, New York.

5 Jaumain, C. (1979). Calcul du taux d'intérêt réel d'une opération financière. *Bulletin de l'Association des Actuaires suisses.*, 79:137– 145.