MODELISATION DES MOBILITES SUR LE MARCHE DU TRAVAIL

by

J.-P. FLORENS[*]
D. FOUGERE[*]
and
M. MOUCHART[**]

June 1993

Abstract

Cet article propose une présentation générale, et peu technique, des modèles micro-économétriques actuellement utilisés pour l'analyse des mobilités sur le marché du travail. Le point de vue général est de présenter ces modèles dans le cadre des processus ponctuels, c'est-à-dire de processus aléatoires en temps continu avec espace d'états fini. Le formalisme mathématique est maintenu à un minimum compatible avec une compréhension raisonnable des difficultés du sujet mais une attention particulière est donnée à une bonne motivation des principaux concepts de base. L'essentiel de l'exposé est consacré aux problèmes relatifs à la modélisation et les problèmes d'inférence sont à peine évoqués.

Mots clé: processus ponctuel, données censurées, hétérogénéité, risque proportionnel, vie accélérée.

Remerciements: Ce travail de synthèse est basé notamment sur les travaux d'une équipe qui inclut: L. Bonnal, C. Cazals, T. Kamionka, S. Pastorello. Qu'ils soient remerciés pour leur libéralité à l'heure de puiser dans leur résultats.

---

[*] GREMAQ, Université des Sciences Sociales, Toulouse, France.

[**] CORE and Institute of Statistics, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium

1. Processus Ponctuels et Phénomènes micro-économiques

1.1. Quelques exemples

1.1.1. Idée de base

De nombreux phénomènes micro-économiques, notamment sur le marché de l'emploi, révèlent les caractéristiques suivantes:

(i) la variable d'intérêt, ou variable endogène, est "qualitative" : elle peut prendre un nombre fini de "valeurs" et ces valeurs appartiennent à un espace "abstrait", c'est-à-dire sans structure mathématique; ce sont les "états" possibles d'un individu.

(ii) l'individu peut changer d'état "n'importe quand", à l'opposé, par exemple, de phénomènes saisonniers où des changements d'état se font à des périodes (et donc des périodicités) prédéterminées.

Il apparaît dès lors naturel de modéliser l'évolution (ou la mobilité) d'un individu dans un tel système par un processus aléatoire (X_t) où , pour tout t , X_t prend sa valeur dans un espace fini et où t varie, de façon continue, dans un intervalle, disons [0 , a] ou [0, ∞). D'un point de vue probabiliste, on parlera alors de " *processus ponctuel* ".

1.1.2. Quelques exemples

Au-delà du marché de l'emploi, il existe de nombreux exemples qui se modélisent naturellement comme des processus ponctuels en micro-économie. Citons, en particulier, des problèmes en économie financière (état de solvabilité d'une entreprise), en fiabilité (état de fonctionnement d'une machine), en gestion commerciale (problème de fidélité à une marque) etc.

Considérons plus particulièrement le marché du travail. Pour un individu donné, on peut distinguer des états tels que, par exemple : au travail, en formation complémentaire, en chômage, malade, à la retraite . De plus, la date de changement d'état est essentiellement " aléatoire" en ce sens qu'elle n'est pas déterminée, par exemple, par un mécanisme saisonnier mais au contraire dépend de la réalisation d'événements aléatoires tels que : recevoir une offre d'emploi, trouver cette offre acceptable(en fonction, par exemple de variables exogènes), être victime d'un accident de travail, être accepté dans un programme de formation professionnelle complémentaire etc.

1.2. Quelques questions pertinentes du point de vue économique

Dans l'exemple du marché du travail, des questions pertinentes sont, par exemple, : dans quelle mesure peut-on expliquer le temps que passe un individu dans un état particulier tel que le chômage ou le fait de changer d'un état à un autre ?

Du point de vue de l'analyse économique, l'intérêt de telles questions peut provenir de différentes considérations :

(i) le bien-être d'un individu peut dépendre plus de la durée de son chômage que du seul fait du chômage; dès lors, l'étude des durées moyennes de chômage peut être plus importante que l'étude du seul nombre de chômeurs d'autant plus qu'un même flux de chômeurs peut résulter , par exemple, d'un petit nombre de chômeurs de longue durée ou d'un plus grand nombre de chômeurs de plus courte durée.

(ii) dans les modèles de recherche d'emploi (job search), la théorie économique fait typiquement apparaître un "salaire de réserve" qui souvent dépend, entre autres facteurs, de la durée déjà passée au chômage et/ou du montant des allocations-chômage perçues par le chômeur.

1.3. Organisation de l'article

La section suivante, la plus importante, présente la structure générale des processus ponctuels et quelques modèles importants dans ce domaine. Cette section se concentre donc sur des problèmes de modélisation mathématique. La troisième section esquisse brièvement le type de raisonnement économique conduisant à des modèles de la classe évoquée dans la section antérieure. Enfin la dernière section aborde une des principales difficultés rencontrées en pratique : la prise en compte dans les modèles des déficiences des données effectivement disponibles, que ce soit parce qu'une trajectoire complète d'un processus en temps continu n'est généralement pas disponible ou que ce soit parce que certaines variables exogènes ne sont pas observables.

2. Modélisation Mathématique de Processus Ponctuels

2.1. Définition et Hypothèses de base

Considérons un ensemble *fini* d'états $E = \{ E_0 , E_1 , ... , E_k\}$ et un espace des temps sous forme d'un intervalle I du type $I = [0, a]$ ou $I = [0, \infty)$. Une fonction définie sur I et à valeurs dans E sera appelée une *Trajectoire*. La figure 2.1. représente un exemple de trajectoire dans les "bons" cas.

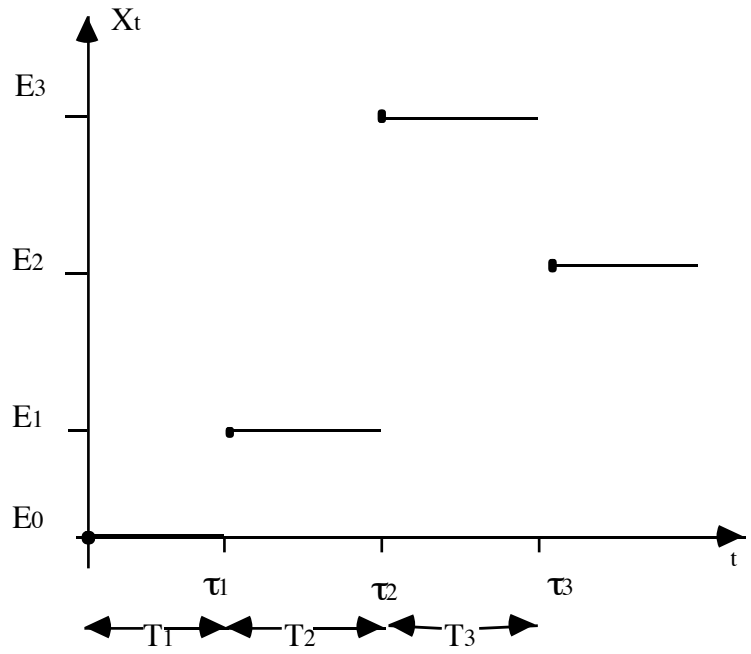

Figure.2.1. Une trajectoire typique dans le cas général .

Un *processus ponctuel* est une fonction (mesurable) définie sur un espace probabilisé et à valeurs dans un espace de trajectoires. De façon plus spécifique, soit (Ω , **A** , P), un espace probabilisé; il représente un environnement économique (aléatoire) et soit X une fonction mesurable définie sur Ω et à valeurs dans E^I :

$$X : \Omega \rightarrow E^I \qquad \omega \rightarrow (X_t(\omega) : t \in I) \quad \text{avec } X_t(\omega) \in E$$

où E est muni de sa tribu des parties (car E est finie) et I de sa tribu borélienne (car il sera plus tard nécessaire de pouvoir intégrer des trajectoires sur l'espace des temps). En d'autres termes, pour tout Borélien B de I et tout état E_j , la fonction X est telle que :

$$\{ \omega \mid X_t(\omega) = E_j \quad \forall\, t \in B \} \in \mathbf{A}$$

Cette condition de mesurabilité n'est cependant pas suffisante car l'analyse qui va suivre demandera que soient de "bonnes variables aléatoires" (c'est-à-dire des fonctions mesurables) des fonctions définies sur Ω et à valeurs réelles (positives) telles que :

(i) les instants d'accés aux états, par exemple:

$\inf\{ t \mid X_t(\omega) = E_j \}$

(ii) les proportions de temps passés dans un état donné, par exemple:

$(b - a)^{-1} \int_{[a,b]} \mathbf{1}_{\{X_t(\omega) = E_j\}}(t)\ dt$

Une condition *suffisante* pour la mesurabilité de ces fonctions est que les trajectoires $(X_t(\omega) : t \in I)$ soient des fonctions (de t, vu que E est fini !) continues à droite (c'est-à-dire $X_{t-}(\omega)$ existe et $X_{t-} = X_t \quad \forall\, t \in I$ et $\forall\, \omega \in \Omega$) avec limite à gauche (c'est-à-dire $X_{t+}(\omega)$ existe $\forall\, t \in I$ et $\forall\, \omega \in \Omega$) On parlera alors de processus à trajectoires CADLAG; on ne discutera pas ici de modifications négligeables de trajectoires. Le "bon" cas de trajectoire de la Figure 2.1. représente précisément cette propriété. Dans la suite, on ne s'intéressera qu'à de tels processus.

2.2. Caractérisation et processus dérivés (ou marginaux) de processus ponctuels

2.2.1. Remarque introductive

L'aspect "temps continu" des processus ponctuels pose des difficultés pratiques à la fois au niveau de la représentation des trajectoires (Comment "résumer" numériquement la figure 2.1, par exemple ?) et de modélisation. Dans cette section, nous allons montrer comment caractériser l'information fournie par l'observation d'un processus ponctuel de différentes façons équivalentes. Dans le suite, nous verrons que ces différentes représentations offrent des facilités différentes de modélisation, particulièrement en vue de tenir compte du fait qu' on n'a pratiquement jamais la possibilité d'observer "complètement" les trajectoires d'un processus ponctuel.

2.2.2. Représentations discrètes

Une conséquence importante de la propriété CADLAG est que les changements d'état auront lieu au plus un nombre dénombrable de fois et que les durées de permanence dans un même état seront des variables aléatoires presque surement strictement positives. Ceci a pour conséquence importante que le processus en temps continu $(X_t : t \in I)$ peut être representé de façon équivalente, du point de vue aléatoire, par deux processus en temps discret :

(i) un processus d'instants de changement d'état , défini récursivement comme suit :

$\tau_0 = 0$

$\tau_j = \inf\{ t \mid t > \tau_{j-1} , X_t \neq X_{\tau_{j-1}} \}$

et donc : $\tau_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$ avec $\tau_j > \tau_{j-1}$ presque sûrement. Il s'agit donc des temps aléatoires de changement d'état.

(ii) un processus de durée du séjour dans un même état, défini récursivement comme suit :

$T_0 = 0$

$T_j = \tau_j - \tau_{j-1}$

en d'autres termes, T_j représente la durée du séjour dans l'état $X_{\tau_{j-1}}$ entre la transition (j-1) et la transition j . Il peut être utile de remarquer :

$\tau_j = \sum_{1 \le i \le j} T_i$

$= T_{.j}$ (par définition)

Dès lors, l'information fournie par l'observation (d'une trajectoire complète) du processus X est équivalente à celle fournie par les (trajectoires complètes de) processus en temps discret :

soit $\{(\tau_j, X_{\tau_j}) : j \in \mathbb{N}\}$ où $(\tau_j, X_{\tau_j}) \in \mathbb{R}_+ \times E$ avec $\tau_j > \tau_{j-1}$ presque sûrement

soit $\{(T_j, X_{T_{.j}}) : j \in \mathbb{N}\}$ où $(T_j, X_{T_{.j}}) \in \mathbb{R}_+ \times E$ avec $T_j > 0$ presque sûrement

2.2.2. Représentations par processus de dénombrement

A un processus ponctuel X, on peut aussi associer un processus multivarié de dénombrement qui lui est équivalent (au point de vue de l'information fournie). Rappelons qu'un processus univarié de dénombrement est un processus aléatoire en temps continu et espace d'états égal à $\mathbb{N}$ tel que ses trajectoires, supposées CADLAG, sont non décroissantes et de sauts égaux à un. On peut interpréter de tels processus comme processus consistant à compter, en accumulant, le nombre de réalisations d'un "évènement ponctuel typique", tel que par exemple le nombre d'accidents à un carrefour donné comme fonction du temps, en supposant qu'il n'y a jamais deux, ou plus, accidents simultanément. Un processus multivarié de dénombrement est simplement une famille finie de processus de dénombrement définis sur le même espace de probabilité.

En vue de la représentation de processus ponctuels, considérons comme "évènement ponctuel typique" les changements d'états. L'ensemble des transitions possibles peut s'écrire de la façon suivante :

$Z = (E \times E) \setminus \{ (E_j, E_j) : 0 \le j \le k \}$

On peut alors représenter le processus ponctuel X par le processus multivarié de dénombrement N :

$N = (N_t^z : z \in Z , t \in I)$

où N_t^z représente le dénombrement des transitions de type z au fil du temps et réalise donc un saut d'une unité aux instants où se réalise une transition z.

2.3. Typologie de processus ponctuels

Au point de vue de la modélisation, il convient de distinguer les processus ponctuels selon le nombre de transitions possibles et selon le nombre d'états possibles.

Certains processus, appelés parfois "processus de survie", ou encore "processus de vie et de mort" ou "modèle simple de durée", admettent un seul changement d'état (la fin de la "vie"). Ils sont caractérisés par une durée univariée et un seul état de sortie. D'autres processus admettent plusieurs changements d'états. Ils sont caractérisés par des durées multivariées et des états de sortie à la fin de chaque durée.

De même, au point de vue du nombre des états possibles, certains processus n'ont que deux états possibles (par exemple, "chomer" ou "ne pas chomer") tandis que d'autres processus admettent plus de deux états, par exemple en distinguant les causes de sortie du chomage. Dans ce cas, une classe particulièrement importante de modèles est celle des *modèles à risques concurrents* : il y a une concurrence possible entre la réalisation de plusieurs évènements et à chacun de ces évènements est associée une sortie vers un état différent. Par exemple, un chômeur peut sortir du chomage dès qu'il reçoit et accepte une offre d'emploi ou dès qu'il reçoit et accepte une possibilité de formation complémentaire. La sortie observée est alors celle qui est associée au premier de ces évènements qui se réalise.

La suite de cette section aura pour objectif d'esquisser quelques modèles relatifs à des processus ponctuels de différents niveaux de complexité et de montrer, en particulier, que négliger la possibilité de plus d'une transition ou de plus d'un état de sortie peut faire perdre des propriétés essentielles d'un modèle économique et entrainer ainsi de graves erreurs de spécification.

2.4. Modèles de durée

2.4.1. Définition

La situation la plus simple se rencontre dans des processus dits "de vie et de mort", c'est-à-dire des processus ponctuels caractérisés par deux états $\{ E_0 , E_1 \}$ avec $X_0 = E_0$ et une seule transition. Dans les commentaires qui suivent, on interprètera E_0 comme"la vie" et E_1 comme "la mort". Une trajectoire d'un tel processus est alors caractérisée par une seule variable aléatoire positive : la durée de permanence dans l'état initial (de vie). On parlera alors de "modèle de durée" sans nécessairement

se référer explicitement à un processus ponctuel sous-jacent. La figure 2.2. représente une trajectoire typique d'un tel processus.

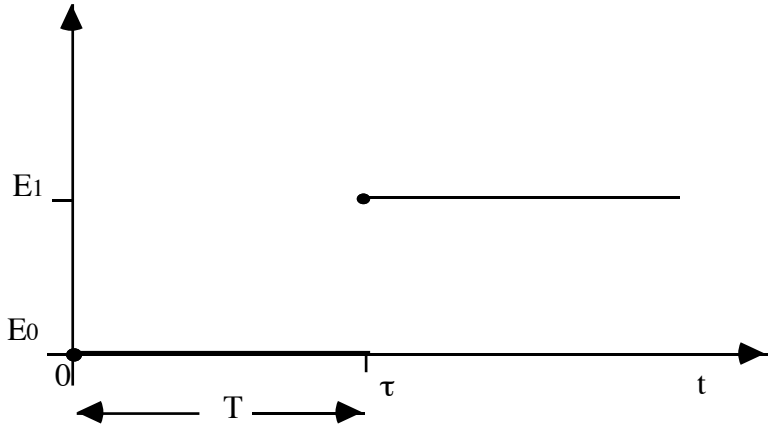

Figure 2.2. :Trajectoire typique d'un processus "de vie et de mort"

2.4.2. Caractérisation de distribution de durées

Les modèles de durée sont aujourd'hui devenus d'utilisation courante en économétrie du marché de l'emploi (voir, par exemples, Bonnal et Fougère(1990), Cazals (1992 b), Heckman et Singer (1984, 1985), Kiefer (1988), Lancaster (1990)). On ne s'y étendra donc pas mais on en rappelera seulement quelques concepts essentiels dans la mesure où ceux-ci se retrouvent dans la modélisation de processus plus complexes ou pour la notation qui y est utilisée.

Rappelons d'abord que la distribution d'une durée T, c'est-à-dire d'une variable aléatoire non-négative, peut être caractérisée de différentes façons. Pour plus de brièveté, rappelons dans le seul cas continu leur notation, définition et quelques unes de leurs relations:

fonction de distribution $F_T(t) = P(T \leq t)$

fonction de survie
$$S_T(t) = 1 - F_T(t) = P(T>t) = \int_{(t,\infty)} f_T(u)\,du$$
$$= \exp\{- H_T(t)\} = \exp\{- \int_{[0,t]} h_T(u)\,du\}$$

fonction de densité
$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = - \frac{d}{dt} S_T(t)$$
$$= h_T(t) \,.\, S_T(t) = h_T(t) \exp\{- \int_{[0,t]} h_T(u)\,du\}$$

fonction de hasard
$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)}$$
$$= \frac{d}{dt} H_T(t)$$

fonction de hasard intégré $H_T(t) = -\ln S_T(t) = \int_{[0,t]} h_T(u)\,du$

Rappelons aussi qu'une fonction de densité peut s'interpréter comme une "probabilité instantanée de décès" , c'est-à-dire :

$$f_T(t) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{P[t<T\leq t+\Delta]}{\Delta}$$

et qu'une fonction de hasard peut s'interpréter comme comme une "probabilité instantanée de décès" *conditionnelle* au fait d'avoir survécu jusqu'à l'instant immédiatement antérieur, c'est-à-dire :

$$h_T(t) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{P[t<T\leq t+\Delta \mid T>t]}{\Delta}$$

Un intérêt majeur des fonctions de hasard est donc de fournir un outil naturel pour une approche dynamique de la modélisation, à savoir décrire en probabilité l'évolution d'un système conditionnellement à son histoire. Souvent, la modélisation économique donnera des informations sur l'allure générale de la fonction de hasard : par exemple, dans des modèles de recherche d'emploi, certains modèles économiques impliquent que la probabilité de sortie du chomage dépende d'un salaire de réserve qui serait fonction, entre autres facteurs, du temps déjà passé dans l'état de chomage et que dès lors on peut s'attendre à une fonction de hasard non-décroissante à moins que des éléments de signaux n'incitent les entreprises à préférer l'embauche de chomeurs d'ancienneté moindre auquel cas on s'attendrait à une fonction de hasard décroissante et une combinaison de ces deux facteurs pourrait conduire à une fonction de hasard unimodale. Une caractéristique importante d'une distribution de durée sera donc la forme de sa fonction de hasard : on s'intéressera plus particulièrement au fait que cette fonction soit constante (distribution exponentielle), monotone (distribution gamma ou Weibull) ou unimodale (distribution log-normale, log-logistique ou des généralisations des distributions antérieures)

2.5. Modèles conditionnels

2.5.1. Introduction

Deux remarques doivent être rappelées. D'une part, un modèle conditionnel est un modèle statistique incomplètement spécifié : au lieu de spécifier le modèle complet qui engendre toutes les observations, on omet de spécifier le modèle marginal qui engendrent les variables conditionantes et on ne spécifie que le modèle qui engendrent les observations conditionnellement à ces variables conditionnantes . Une telle optique de modélisation est motivée par des considérations de robustesse à l'erreur de spécification et de simplification de modèle. L'admissibilité d'une telle réduction est basée sur des hypothèses d'exogénéité qu'il ne convient pas de discuter de façon approfondie dans le cadre de cette présentation générale.

D'autre part, il est courant dans la spécification de modèles conditionnels de s'inspirer de modèles marginaux courants et de les modifier soit en rendant certains des paramètres de ces modèles dépendant des variables exogènes soit en appliquant ces modèles marginaux à des transformations de variables impliquant toutes les variables (endogènes et exogènes). Ces deux méthodes, non contradictoires, se retrouvent dans la modélisation conditionnelle de modèles de durée et donnent lieu respectivement aux modèles de type "hasard proportionnel" et "vie accélérée". Ces deux méthodes partagent un même point de départ, à savoir une distribution "de base" modélisant la distribution d'un individu "de base", c'est-à-dire de référence en ce qui concerne la valeur des variables exogènes, et ensuite une modification de ce modèle (marginal) pour incorporer l'action des variables exogènes. Ceci motive la convention de notation suivante : les paramètres des modèles conditionnels seront écrit comme suit : $\theta = (\alpha, \beta)$ où α est un paramètre suffisant pour la distribution de base et β pour décrire l'action des variables exogènes.

Comme pour la section antérieure, les modèles de durée univariés et conditionnels constituent un domaine relativement bien connu dans la littérature récente(voir, parmi de nombreux exemples, Bonnal et Fougère(1990), Cazals (1992 b), Florens et Fougère(1989), Fougère et Sérandon (1992)). Cette section sera donc brève et se limitera à rappeler les concepts les plus importants dans la mesure où ceux-ci seront à la base de modélisations de processus ponctuels plus complexes que les modèles univariés de durée.

2.5.2 Hasard proportionnel

Dans le modèle de "hasard proportionnel", l'effet des variables exogènes est de multiplier la probabilité de sortie de l'état initial par un facteur $g(z, \beta)$ ne dépendant que des variables exogènes; il se définit donc par la relation :

$$h_T(t \mid z,\theta) = h_0(t \mid \alpha)\ g(z, \beta) \qquad \theta = (\alpha, \beta)$$

ou, de façon équivalente, :

$$H_T(t \mid z,\theta) = g(z, \beta)\, H_0(t \mid \alpha)$$
$$S_T(t \mid z,\theta) = [S_0(t \mid \alpha)]^{g(z, \beta)}$$
$$f_T(t \mid z,\theta) = g(z, \beta).f_0(t \mid \alpha)\, [S_0(t \mid \alpha)]^{g(z, \beta)-1}$$

Une propriété importante en est :

$$\frac{\partial}{\partial z} h_T(t \mid z,\theta) = h_0(t \mid \alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial z} g(z,\beta)$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln h_T(t \mid z,\theta) = \frac{\partial}{\partial z} \ln g(z,\beta)$$

en d'autres termes, l'élasticité de la fonction de hasard par rapport à z est constante par rapport à t, ne dépend pas de la distribution de base et ne dépend donc que la fonction g.

Une spécification semi-paramétrique, d'un emploi fréquent, est obtenue en écrivant :

$$h_0(t \mid \alpha) = \alpha(t),$$

c'est-à-dire en spécifiant que l'espace paramétrique de α est constitué de toutes les fonctions à valeurs non-négatives (et d'intégrale infinie sur $\mathbb{R}_+$) et en laissant β prendre ses valeurs dans un espace Euclidien (de dimension finie). Ce modèle est connu, dans la littérature, comme le "modèle de Cox".

Une spécification courante de la fonction $g(z, \beta)$ permet de tenir compte de façon très simple de la contrainte de non-négativité de la fonction de hasard, à savoir :

$$g(z, \beta) = \exp(z'\beta) \qquad \beta \in \mathbb{R}^k$$

Cette specification possède un certain nombre de propriétés intéressantes :

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln h_T(t \mid z,\theta) = \frac{\partial}{\partial z} \ln g(z,\beta) = \beta$$

(i.e. effet proportionnel constant de la variable z sur la probabilité conditionnelle instantanée de quitter l'état E_o) De plus :

$$H_T(t \mid z,\theta) = \exp(z'\beta)\, H_0(t \mid \alpha)$$
$$S_T(t \mid z,\theta) = [S_0(t \mid \alpha)]^{\exp(z'\beta)}$$
$$f_T(t \mid z,\theta) = \exp(z'\beta).f_0(t \mid \alpha)\, [S_0(t \mid \alpha)]^{\exp(z'\beta)-1}$$

Ce modèle accepte une représentation en termes de régression. Dans ce but, définissons :

$$\varepsilon_t = - \ln H_0(t \mid \alpha) - z'\beta$$

On remarque alors :

$$\begin{aligned}
P[\varepsilon_t < a] &= P[\ln H_0(t \mid \alpha) > - a - z'\beta \mid z,\theta] \\
&= P[H_0(t \mid \alpha) > \exp(- a - z'\beta) \mid z,\theta] \\
&= P[t > H_{0,\alpha}^{-1}(\exp-[a + z'\beta]) \mid z,\theta] \\
&= S_T(H_{0,\alpha}^{-1}(\exp-[a + z'\beta]) \mid z,\theta) \\
&= \exp-[H_0\{H_{0,\alpha}^{-1}(\exp-[a + z'\beta]) \mid \alpha\} . \exp(z'\beta)] \\
&= \exp-[\exp(-a)]
\end{aligned}$$

Dès lors, la distribution de ε_t est complètement specifiée , indépendemment de α, z ou β , à savoir une distribution de type 1 de valeur extrême et nous pouvons donc écrire:

$$-\ln H_0(t \mid \alpha) = z'\beta + \varepsilon_t$$

On reconnait une régression (non-normale) *non-linéaire* à moins que α ne soit connu.

2.5.3. Vie accélérée

a) Définition du modèle de vie accélérée

Dans le modèle de " vie accélérée", l'effet des variables exogènes est de modifier l'unité de mesure du temps , plus spécifiquement :

$$T = [\, g(z, \beta) \,]^{-1} \; T_0 \qquad T_0 = g(z, \beta)\, T$$

ou, de façon équivalente, :

$$h_T(t \mid z,\theta) = g(z, \beta) \,.\, h_0(t \,.\, g(z, \beta) \mid \alpha)$$
$$H_T(t \mid z,\theta) = H_0(t \,.\, g(z, \beta) \mid \alpha)$$
$$S_T(t \mid z,\theta) = S_0(t \,.\, g(z, \beta) \mid \alpha)$$
$$f_T(t \mid z,\theta) = g(z, \beta)\; f_0(t \,.\, g(z, \beta) \mid \alpha)$$

où, comme de coutume, $\theta = (\alpha , \beta)$. Cette specification est particulièrement intéressante lorsque la distribution de base admet un paramètre d'échelle.

b) Test Empirique du modèle de vie accélérée

Considerons les fonctions quantile , c'est-à-dire l' inverse des fonctions de Survie (plutôt que des fonctions de Distribution, comme c'est le cas usuel) , :

$$q_T(p \mid z,\theta) = S_T^{-1}(p \mid z,\theta) \qquad 0 \le p \le 1$$
$$q_0(p \mid \alpha) = S_0^{-1}(p \mid \alpha) \qquad 0 \le p \le 1$$

Etant donnée la stricte monotonicité (dans le cas continu) des fonctions de Survie, nous avons :

$$q_0(p \mid \alpha) = g(z, \beta) \,.\, q_T(p \mid z,\theta)$$

Dans l'espace de coordonnées $((q_0(p \mid \alpha) , q_T(p \mid z,\theta))$ et pour une valeur fixée de z, nous avons donc une droite homogène de pente égale à $g(z, \beta)$. Ceci suggère un test simple pour la validité empirique du modèle de vie accélérée en examinant ce qui a été appelé le "Q-Q-plot" , c'est-à-dire le graphe de ces deux quantiles pour une valeur fixée de z et estimée de $\theta = (\alpha , \beta)$.

c) Représentation de régression du modèle de **vie accélérée**

Le modèle de " vie accélérée" peut aussi s'écrire, en terme de logarithmes, de la façon suivante :

$$\ln T = \ln T_0 - \ln g(z, \beta)$$

En définissant :

$$\mu_0 = E[\ln T_0]$$
$$\varepsilon = \ln T_0 - E[\ln T_0]$$

on peut en effet écrire :

$$\ln T = \mu_0 - \ln g(z, \beta) + \varepsilon$$

En particulier :

(i) si $\ln T_0 \sim N(\mu, \sigma^2)$, c'est-à-dire $T_0 \sim LN(\mu, \sigma^2)$, alors $\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$. On obtient alors un modèle de régression normale (*si* il n'y a pas de censure).

(ii) si $g(z, \beta) = \exp(z'\beta)$, on obtient alors un modèle de régression linéaire :

$$\ln T = \mu_0 - z'\beta + \varepsilon$$

2.6. Modélisation de processus ponctuels plus généraux

2.6.1. Introduction

Une fois que l'on considère des processus plus complexes que le modèle simple de durée (c'est-à-dire, plus de deux états et/ou plus d'une seule transition), les problèmes de modélisation gagnent beaucoup en substance vu, notamment, les multiplicités de représentation évoquées en section 2.2. Bien que n'étant pas encore d'un emploi très courant en économétrie du travail, ces modélisations plus complexes ont connu récemment un intérêt considérable (voir, par exemple, Cazals (1992 a), Florens et Fougère (1989)).

Sur le plan économique, l'intérêt porte essentiellement sur l'aspect dynamique de la modélisation, c'est-à-dire sur la spécification du rôle de l'histoire du processus quant à son évolution

aléatoire. Ce problème général de spécification dynamique est plus délicat en temps continu qu'en temps discret. Par exemple, en temps discret, le modèle le plus simple est celui de l'indépendance complète mais un processus où les X_t seraient mutuellement indépendants en temps continu donneraient , avec probabilité un, des trajectoires qui ne seraient pas CADLAG (ni même mesurables en t) car sur tout intervalle ouvert de I il y aurait une infinité non-dénombrable de changements d'état : un modèle clairement peu intéressant pour décrire le comportement d'un individu!

Deux outils vont se révéler particulièrement performants pour affronter ces difficultés. D'une part, le théorème fondamental en théorie des processus, dû à Kolmogorov, montre que la loi d'un processus en temps continu (ou à espace de temps infini dénombrable) est caractérisée par l'ensemble de toutes ses distributions marginales fini-dimensionnelles, c'est-à-dire par l'ensemble de toutes les distributions multivariées de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ pour tout $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ et tout n fini. (On les appelle un "système projectif" car cet ensemble de distributions est contraint par une condition évidente de cohérence vis-à-vis de la marginalisation). On pourra donc modéliser certaines propriétés structurelles d'un processus ponctuel, telle que la markovianité, à partir de ces seules distributions fini-dimensionnelles.

Le second outil , fourni par la décomposition de Doob-Meyer, consiste heuristiquement, à étendre au cas continu la décomposition usuelle des procesus en temps discret (du type ARMA, par exemple) en une somme de l'espérance conditionnelle au passé et de l'innovation. L'objet de la sous-section suivante sera d'esquisser les grandes lignes de cet outil en limitant le plus possible l'emploi de techniques probabilistes avancées. La fin de cette section présentera quelques idées de modélisation dans le cas général.

2.6.2. Intensité stochastique et compensateur

a) Introduction

Considérons un processus de dénombrement univarié $N = (N_t : t \in I)$ et remarquons que, semblablement à un processus ponctuel, il peut être représenté par le processus en temps discret des instants de saut $\tau = (\tau_n : n \in \mathbb{N})$ -qui sont aussi des temps d'arrêt - avec $\tau_n \in \mathbb{R}_+$, $\tau_n > \tau_{n-1}$ presque surement et :

$$\tau_n = \inf\{ t \mid N_t = n \} \qquad \text{avec} \qquad \tau_0 = 0$$

En effet, le processus N_t peut être representé de la façon suivante :

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t\}}(t)$$

Il peut aussi être représenté par le processus en temps discret des intervalles entre les sauts : $T = (T_n : n \in \mathbb{N})$ avec $T_n \in \mathbb{R}_+$ défini par :

$$T_n = \tau_n - \tau_{n-1} \qquad \text{et } T_0 = 0$$

vu que :

$$\tau_n = \sum_{1\leq i\leq n} T_i$$

Les lois de ces représentations en temps discret sont caractérisées par la suite des distributions conditionnelles générant $(\tau_{n+1} \mid \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ ou $(T_{n+1} \mid T_1, T_2, \ldots, T_n)$ pour $n \geq 0$, celles-ci étant reliées entre elles par les relations :

$$S_{T,n+1}(t - \sum_{1\leq i\leq n} T_i \mid T_1, T_2, \ldots, T_n) = S_{\tau,n+1}(t \mid \tau_1, \ldots, \tau_n) \qquad t > \tau_n = \sum_{1\leq i\leq n} T_i$$
$$h_{T,n+1}(t - \sum_{1\leq i\leq n} T_i \mid T_1, T_2, \ldots, T_n) = h_{\tau,n+1}(t \mid \tau_1, \ldots, \tau_n)$$

$$S_{T,n+1}(t \mid T_1, T_2, \ldots, T_n) = S_{\tau,n+1}(t + \tau_n \mid \tau_1, \ldots, \tau_n) \qquad t > 0$$
$$h_{T,n+1}(t \mid T_1, T_2, \ldots, T_n) = h_{\tau,n+1}(t + \tau_n \mid \tau_1, \ldots, \tau_n)$$

b) Décomposition de Doob-Meyer

Nous allons reconsidérer la fonction de hasard, qui caractérisait la distribution d'une variable aléatoire de durée à la section 2.4., du point de vue du processus de dénombrement sous-jacent. Dans ce but, écrivons $\mathbf{F}_N(t)$ pour l'"histoire" du processus N_t jusqu'au temps t, c'est-à-dire l'information fournie par l'observation du processus N_t jusqu'au temps t (plus précisément, il s'agit de la tribu engendrée par les variables aléatoires $(N_u : 0 \leq u \leq t)$ et l'ensemble $\{ \mathbf{F}_N(t) : t \in I \}$ constitue une famille croissante de tribus, c'est-à-dire une filtration) ; c'est aussi l'information fournie par l'observation de

$$(\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n \leq t) \cap \{\tau_{n+1} > t \}$$

ou par l'observation de :

$$(T_1, T_2, \ldots, T_n : \sum_{1\leq i\leq n} T_i \leq t) \cap \{T_{n+1} > t - \sum_{1\leq i\leq n} T_i \}.$$

Si on écrit $\sigma(X)$ pour la tribu engendrée par une variable aléatoire X, on a alors de façon un peu plus précise:

$$\mathbf{F}_N(t) = \sigma(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \mathbf{1}\{\tau_{n+1} > t\}) = \sigma(T_1, T_2, \ldots, T_n, \mathbf{1}\{T_{n+1} > t - \sum_{1 \le i \le n} T_i\})$$

On notera aussi N_{t-} le processus de limite à gauche, c'est-à-dire :

$$N_{t-} = \lim_{u \uparrow t} N_u$$

De même, on écrira $\mathbf{F}_N(t-)$ pour l'histoire qui lui est associée - on pourrait aussi écrire $\mathbf{F}_N([0,t))$ mais ce serait plus lourd. L'*intensité stochastique* - $h_N(t)$- du processus N_t est la "probabilité instantanée" de saut, qui ne peut être que unitaire, conditionnellement à son histoire, plus précisément:

$$h_N(t) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{P[N_{t+\Delta} - N_t = 1 \mid \mathbf{F}_N(t-)]}{\Delta}$$

et le *compensateur* - $H_N(t)$ - du processus N_t est l'intégrale de son intensité stochastique :

$$H_N(t) = \int_{[0,t]} h_N(u)\, du$$

La décomposition de Doob-Meyer consiste à décomposer le processus N_t selon son compensateur $H_N(t)$:

$$N_t = H_N(t) + M_t$$

où le processus M_t, défini par $M_t = N_t - H_N(t)$, est une martingale par rapport à $\mathbf{F}_N(t)$, c'est-à-dire $E[M_t \mid \mathbf{F}_N(s)] = M_s \ \forall\, s \le t$. Cette décomposition est l'analogue, en temps continu, de la décomposition d'un processus en temps discret en une somme de son processus d' espérance conditionnelle par rapport au passé et d'un processus d'innovation. La martingale M_t joue le rôle de processus d'innovation tandis que le compensateur $H_N(t)$ est la partie prévisible de N_t et est un processus non-décroissant tel que $H_N(0)=0$. Il faut cependant noter que M_t n'est pas l'innovation du processus mais bien la somme des innovations jusqu'au temps t; en termes différentiels, on a en effet :

$$dN_t = h_N(t)\, dt + dM_t$$

où dM_t est effectivement le processus d'innovation qui est donc une différence de martingale.

Un exemple simple de processus en temps discret aidera à mieux comprendre le sens de cette dernière équation. Le processus auto-régressif d'ordre 1:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, ...$$

peut en effet s'écrire , de façon équivalente,:

$$\Delta y_t = (\alpha - 1)\, y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, ...$$

On reconnaîtra en Δy_t l'analogue de dN_t, $(\alpha - 1)\, y_{t-1}$ est l'espérance conditionnelle au passé de Δy_t et est donc une fonction du passé du processus comme $h_N(t)\, dt$ et ε_t est une innovation comme dM_t. En sommant cette dernière équation on obtient :

$$y_t - y_0 = (\alpha - 1) \sum_{0 \le i \le t-1} y_i + \sum_{1 \le i \le t} \varepsilon_t$$

ou encore :

$$y_t = [\, \alpha\, y_0 + (\alpha - 1) \sum_{1 \le i \le t-1} y_i \,] + \sum_{1 \le i \le t} \varepsilon_t$$

et on observe que le premier terme de droite est une fonction du passé mais n'est pas l'espérance conditionnelle au passé du terme de gauche,comme $H_N(t\,)$, et que le second terme de droite est une somme d'innovations comme M_t.

Il y a cependant une spécificité importante de l'aspect dénombrement. Une des caractéristiques des processus ponctuels est en effet que les modélisations du compensateur et de l'innovation sont liées. Il y a en effet bijection entre l'espace des compensateurs et l'espace des processus ponctuels et le processus d'innovation est dérivé de l'un comme de l'autre. Plus spécifiquement, on a la situation suivante. Conditionnellement à l'histoire $\mathbf{F}_N(t-\,)$, $h_N(t)\, dt$ est de variance nulle et dM_t est d'espérance nulle et de variance égale à $h_N(t)\, dt$; en d'autres termes, conditionnellement à l'histoire $\mathbf{F}_N(t-\,)$, dN_t a même espérance et variance, chacune égale à $h_N(t)\, dt$: on dira que ces processus sont "localement poissoniens" (ou "localement" s'entend au sens du temps). Cette précision mathématique renforce l'idée que la modélisation d'un processus ponctuel se base naturellement sur la modélisation de son compensateur ou de son intensité stochastique.

Remarque. Nous avons passé sous silence les conditions qui assurent l'existence de la limite définissant l'intensité stochastique et son intégrabilité qui permette de définir le compensateur. Au point de vue mathématique, il est plus naturel de commencer par définir le compensateur au moyen de la décomposition de Doob-Meyer et d'en dériver les conditions de dérivabilité qui permettent de définir l'intensité stochastique.

c) Quelques exemples

Dans le cas d'un processus ponctuel de vie et de mort, le processus de dénombrement qui lui est associé est un processus élémentaire univarié et avec un seul saut. Son intensité stochastique s'écrit alors :

$$h_N(t) = h_T(t) \ (1 - N_{t-})$$

où $h_T(t)$ est la fonction de hasard de la distribution de la seule durée T caractérisant le processus et où le second terme vaut 1 avant le seul saut et vaut 0 après. En effet, dans ce cas il y a une seule transition sur toute trajectoire complète du processus et nous avons clairement :

$$\{ N_{t+\Delta} - N_t = 1 \} = \{ t < T \leq t + \Delta \}$$
$$\{ N_{t-} = 0) = \{ T > t \} \text{ et } \{ N_t = 1 \} = \{ T \leq t \}$$

De même, dans le cas d'un processus de dénombrement général mais univarié, l' intensité stochastique s'écrit :

$$h_N(t) = \sum_{n\geq 0} h_{\tau,n+1}(t \mid \tau_1, ..., \tau_n) \ \mathbf{1}_{[\tau_n, \tau_{n+1})}(t) \qquad (*)$$

$$= \sum_{n\geq 0} h_{T,n+1}(t - \sum_{1\leq i\leq n} T_i \mid T_1, ..., T_n) \ \mathbf{1}_{[\sum_{0\leq j\leq n} T_j \, , \ \sum_{0\leq j\leq n+1} T_j)}(t)$$

L'exemple des *processus poissonniens* peut aussi être éclairant pour montrer comment le compensateur, ou l'intensité stochastique, permet de caractériser la loi d'un processus ponctuel . Rappelons qu'en général, un processus poissonnien est un processus à accroissements indépendants (i.e. $N_s - N_r \perp\!\!\!\perp N_u - N_t$ pour tout $r< s<t<u$) tel que ses accroissements $N_s - N_r$ sont distribués selon une loi de Poisson de paramètre $\mu([r, s))$ où μ est une mesure quelconque sur $\mathbb{R}_+$. Un processus poissonnien est *homogène* lorsque la mesure μ est proportionnellle à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$: $\mu([r, s)) = \lambda(s-r)$ où λ est une constante strictement positive; dans ce cas , on peut vérifier que:

$$H_N(t) = \lambda t \qquad \text{et} \qquad h_N(t) = \lambda$$

En général , $H_N(t) = \mu([0, t))$, la fonction cumulative de la mesure μ. Si celle-ci admet une densité m(t) par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $h_N(t) = m(t)$ et dans le cas contraire, il n'y a pas d'intensité stochastique. Ainsi donc, le problème de l'existence d'une intensité stochastique est essentiellement le même problème que celui de l'existence d'une densité de probabilité.

d) loi de probabilité d'un processus de dénombrement

Considérons maintenant une observation d'un processus univarié de dénombrement N entre 0 et t : $(N_u : 0 \le u \le t)$ et écrivons l(t) pour sa loi de probabilité. Comme mentionné précédemment, il est équivalent d' observer : $(\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n \le t) \cap \{\tau_{n+1} > t\}$, c'est-à-dire un vecteur de variables aléatoires continues - les instants de sauts$(\tau_1, ..., \tau_n)$ - et l'événement $\{\tau_{n+1} > t\}$ ou encore $(T_1 , T_2 ,...,T_n : \sum_{1 \le i \le n} T_i \le t) \cap \{T_{n+1} > t - \sum_{1 \le i \le n} T_i\}$.. On peut donc décrire la loi l(t) au moyen de la densité conjointe des instants de saut , ou des durées, et de la probabilité de l'évènement caractérisant l'arrêt de l'observation. Cette représentation est particulièrement importante car elle conduit directement à l'écriture des fonctions de vraisemblance dans les modèles statistiques impliquant des processus ponctuels.

En raisonnant soit sur les instants de saut soit sur les durées, on obtient :

$$l(t) = S_{\tau,n+1}(t \mid \tau_1, ..., \tau_n) \, \mathbf{1}_{[\tau_n, \tau_{n+1})}(t) \prod_{0 \le i \le n-1} f_{\tau,i+1}(\tau_{i+1} \mid \tau_1, ..., \tau_i)$$

$$= S_{T,n+1}(t - \sum_{1 \le i \le n} T_i \mid T_1, ..., T_n) \, \mathbf{1}_{[\sum_{0 \le j \le n} T_j , \sum_{0 \le j \le n+1} T_j)}(t) \prod_{0 \le i \le n-1} f_{T,i+1}(T_{i+1} \mid T_1, ..., T_i)$$

En écrivant les fonctions de densité et de survie en termes de la fonction de hasard et en utilisant la relation (*), on obtient :`

$$l(t) = \{ \exp - \int_{[0, t - \sum_{1 \le j \le n} T_j)} h_{T,n+1}(u \mid T_1, ..., T_n) \, du \} \, \mathbf{1}_{[\sum_{0 \le j \le n} T_j , \sum_{0 \le j \le n+1} T_j)}(t) \prod_{0 \le i \le n-1} h_{T,i+1}(T_{i+1} \mid T_1, .., T_i) \exp - \int_{[0, T_{i+1})} h_{T,i+1}(u \mid T_1, ..., T_i) \, du$$

En regroupant les intégrales sous les exponentielles et en opérant les changements de variables : $u \rightarrow u + \sum_{1 \le j \le i} T_j$, on obtient successivement :

$$\int_{[0, t - \sum_{1 \le j \le n} T_j)} h_{T,n+1}(u \mid T_1, ..., T_n) + \sum_{0 \le i \le n-1} \int_{[0, T_{i+1})} h_{T,i+1}(u \mid T_1, ..., T_i) \, du$$

$$= \int \{ h_{T,n+1}(u \mid T_1, ..., T_n) \, \mathbf{1}_{[0,\, t - \sum_{1 \le j \le n} T_j)} (u) + \sum_{0 \le i \le n-1} h_{T,i+1}(u \mid T_1, ..., T_i) \, \mathbf{1}_{[0,\, T_{i+1})}(u) \} du$$

$$= \int \{ h_{T,n+1}(u - \sum_{0 \le j \le n} T_j \mid T_1, ..., T_n) \, \mathbf{1}_{[\sum_{0 \le j \le n} T_j ,\, t)} (u) + \sum_{0 \le i \le n-1} h_{T,i+1}(u - \sum_{0 \le j \le i} T_j \mid T_1, ..., T_i) \, \mathbf{1}_{[\sum_{0 \le j \le i} T_j ,\ \sum_{0 \le j \le i+1} T_j)}(u) \} du$$

$$= \int \{ \sum_{0 \le i} h_{T,i+1}(u - \sum_{0 \le j \le i} T_j \mid T_1, ..., T_i) \, \mathbf{1}_{[\sum_{0 \le j \le i} T_j,\, \sum_{0 \le j \le i+1} T_j)}(u) \} \mathbf{1}_{[0,\, t)}(u) du$$

$$= \int_{[0,\, t)} h_N(u) \ du$$

en remarquant, en effet que :

$$h_{T,n+1}(u - \sum_{0 \le j \le n} T_j \mid T_1, ..., T_n) \, \mathbf{1}_{[\sum_{0 \le j \le n} T_j ,\, t)} (u) = \sum_{i \ge n} h_{T,i+1}(u - \sum_{0 \le j \le i} T_j \mid T_1, ..., T_i) \, \mathbf{1}_{[\sum_{0 \le j \le i} T_j ,\ \sum_{0 \le j \le i+1} T_j)}(u) \, \mathbf{1}_{[0,\, t)}(u)$$

Dès lors :

$$l(t) = \{ \exp - \int_{[0,\, t)} h_N(u) \, du \} \prod_{0 \le i \le n-1} h_{T,i+1}(T_i \mid T_1, ..., T_i)$$

ou encore :

$$\ln l(t) = - H_N(t) + \sum_{0 \le i \le n-1} \ln h_{T,i+1}(T_i \mid T_1, ..., T_i)$$

Ce développement montre, de nouveau, le rôle naturel du compensateur, de son intensité stochastique et de sa représentation par les fonctions de hasard conditionnelles, $h_{T,i+1}$, dans la modélisation d'un processus ponctuel ou du processus de dénombrement qui lui est associé.

Dans le cas de processus de dénombrement multivariés, associés à des processus ponctuels plus complexes que le modèle simple de durée, le résultat final est semblable, dans son essence, au cas univarié mais sensiblement plus compliqué au point de vue analytique. La difficulté provient du fait que la description de l'histoire du processus jusqu'à l'instant t, $\mathbf{F}_N(t)$, doit maintenant tenir compte de toutes les durées (ou instants de saut) passées pour *toutes* les coordonnées du processus multivariés, c'est-à-dire pour toutes les transitions possibles du processus ponctuel.

2.6.3. Processus Markoviens et semi-Markoviens

Dans les processus en temps discret - et espace d'états continu- la classe des modèles auto-régressifs est une façon naturelle d'aborder l'aspect dynamique de la modélisation car elle se base sur la suite des modèles conditionnels à une suite croissante d'histoires et explicite au départ la "longueur de la mémoire" au moyen de l'ordre d'auto-régressivité. Dans les processus en temps continu, la propriété markovienne porte non pas sur la "longueur" de la mémoire mais sur sa structure : le processus ne retient que le passé "le plus proche". Pour définir de manière plus précise le caractère Markovien d'un processus ponctuel, on utilise la caractérisation de sa loi par le système projectif de toutes ses distributions fini-dimensionnnelles de (X_{t_1} , X_{t_2} , ., X_{t_n}). On dira que le processus ponctuel $X = (X_t : t \in I)$ est *Markovien* si pour tout $t_1 < t_2 < \ ... < t_n$ et tout n fini :

$$X_{t_n} \perp\!\!\!\perp (X_{t_1} , X_{t_2} , ., X_{t_{n-1}}) \mid X_{t_{n-1}}$$

ou encore

$$P(X_{t_n} \mid X_{t_1} , X_{t_2} , ., X_{t_{n-1}}) = P(X_{t_n} \mid X_{t_{n-1}})$$

en d'autres termes, la loi de probabilité de X_t à un instant quelconque t_n ,conditionnellement à un résumé fini de son histoire (X_{t_1} , X_{t_2} , ., $X_{t_{n-1}}$) ne dépend que de sa réalisation la plus proche dans cette histoire finie ($X_{t_{n-1}}$).

La loi d'un processus Markovien est alors caractérisée par une fonction définie sur $\{(s,t) \in I \times I \mid s<t)$ à valeurs dans l'espace des matrices stochastiques d'ordre $(k+1) \times (k+1)$ dont les éléments sont définis par :

$$P(s,t) = [p_{i,j}(s,t)] \qquad s<t$$

$$p_{i,j}(s,t) = P(X_t = i \mid X_s = j]$$

On dénommera P(s,t) la *matrice des probabilités de transition*. La propriété CADLAG est alors équivalente à ce que pour tout (i,j) :

$$\lim_{t \downarrow s} p_{i,j}(s,t) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}$$

Le processus multivarié de dénombrement associé à un processus ponctuel markovien a pour intensité stochastique :

$$q_{i,j}(t) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{p_{i,j}(t,t+\Delta)}{\Delta} = \frac{d}{dt} p_{i,j}(t,t) \qquad i \neq j$$

(la condition $i \neq j$ s'interprète comme suit : on exclut la possibilité d'une transition d'un état vers lui-même). En posant :

$$q_{i,i}(t) = - \sum_{i \neq j} q_{i,j}(t)$$

on peut alors définir la *matrice d'intensité des transitions* :

$$Q(t) = [\, q_{i,j}(t) \,]$$

On dira que le processus markovien est *homogène (vis-à-vis du temps)* si ses matrices de transition ne dépendent pas de l'origine des temps, c'est-à-dire si

$$p_{i,j}(s,t) = p_{i,j}(0,t-s)$$

dans ce cas, les *matrices de probabilité de transition* s'écriront simplement $P(t) = [p_{i,j}(t)]$. La propriété CADLAG est alors équivalente à ce que pour tout (i,j) :

$$\lim_{t \downarrow 0} p_{i,j}(t) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}$$

et les intensités stochastiques ne dépendent plus de t ; en effet :

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{p_{i,j}(t,t+\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{p_{i,j}(0,\Delta)}{\Delta} = \left[\frac{d}{dt} p_{i,j}(t) \right]_{t=0} = q_{ij} \geq o \qquad i \neq j$$

Dès lors, la matrice d'intensité de transition devient simplement : $Q = [\, q_{i,j} \,]$. En définissant la fonction exponentielle matricielle comme de coutume :

$$e^{Qt} = \sum_{0 \leq i < \infty} \frac{Q^i t^i}{i!}$$

la relation entre les deux matrices P(t) et Q est donnée par :

$$P(t) = e^{Qt}$$

Les processus ponctuels markoviens homogènes jouissent dès lors d'une grande simplicité quant à leur structure aléatoire. En effet, comme tout processus ponctuel, leur trajectoire peut être décrite par la suite $\{(T_n , X_{T_n}) : n \in \mathbb{N}\}$ des durées de permanence dans un état et des états atteints par chaque transition ou encore $\{(T_n, Z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ où Z_n est la nième transition : $Z_n = (X_{T_{n-1}} , X_{T_n})$. Pour simplifier l'écriture, on notera Y_n au lieu de X_{T_n} pour désigner l'état atteint lors de la nième transition.

La loi de ces trajectoires a les propriétés suivantes :

(i) les processus $\{(T_n, Y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ est markovien , c'est-à-dire :

$$(T_n, Y_n) \perp\!\!\!\perp \{(T_i, Y_i) : 0>i>n-1\} \mid T_{n-1}, Y_{n-1}$$

(ii) de plus :

$$(T_n, Z_n) \perp\!\!\!\perp T_{n-1}, \mid Y_{n-1}$$
$$Y_n \perp\!\!\!\perp T_n \mid Y_{n-1}$$

(iii) le processus $(Y_n : n \in \mathbb{N})$ est markovien et sa loi est caractérisée par :

$$P(Y_n = i \mid Y_{n-1} = j) = \rho_{i,j}$$

où $\rho_{i,j}$ est défini par :

$$\rho_{i,j} = \frac{q_{ij}}{\sum_{i \neq j} q_{ij}} \quad i \neq j$$
$$= 0 \quad i=j$$

(iv) Les distributions conditionnelles $(T_n \mid Y_{n-1} = j)$ des durées sont exponentielles de paramètres λ_j où λ_j est défini par :

$$\lambda_j = \sum_{i \neq j} q_{ij}$$

On dira enfin qu'un processus ponctuel est *semi-markovien* s'il jouit des trois premières propriétés ci-dessus alors que ses distributions conditionnelles des durées sont quelconques (c'est-à-dire non-exponentielles).

3. Modélisation structurelle de Processus Ponctuels

Nous présentons ici deux modélisations structurelles de processus ponctuels sur le marché du travail. La première est le modèle le plus élémentaire de recherche d'emploi en situation de chômage, la seconde est la généralisation de ce modèle à des processus de mobilité en temps continu et avec plus de trois états possibles.

3.1. Le modèle élémentaire de recherche d'emploi

Ce modèle est maintenant bien connu. Il a été étendu, par relâchement progressif de ses hypothèses, à des situations de recherche plus réalistes, voire à des modèles d'équilibre plus généraux ou à d'autres marchés que le marché du travail. Nous rappellerons ici brièvement sa structure et renvoyons en particulier à la synthèse récente de Bonnal (1992, chapitre 1) pour une présentation plus complète.

Dans ce modèle à deux états (emploi, chômage), un travailleur peut postuler à des emplois dans lesquels le taux instantané de non-renouvellement du contrat de travail est constant et égal à β (>0) et les salaires sont distribués selon la fonction de répartition F. En d'autres termes la distribution des durées d'emploi est exponentielle de paramètre β , et l'intensité de transition de l'emploi vers le chômage est constamment égale à β.

Lorsqu'un contrat de travail est non-renouvelé, le travailleur passe en chômage et reprend immédiatement sa recherche. Pour un travailleur en chômage, les offres d'emploi sont générées par un processus de Poisson homogène de taux λ.

Avant d'entreprendre sa recherche, le travailleur est censé connaitre avec exactitude la forme et les paramètres de la distribution de probabilité F des propositions de salaire. Cette distribution est supposée être une distribution d'équilibre stationnaire. Pour effectuer sa recherche, le travailleur doit encourir un coût instantané égal à $c(c > 0)$.

Une recherche engendre alors l'observation d'une suite $(X)_{n\square}$de réalisations indépendantes d'une variable aléatoire réelle, positive, absolument continue, de f.d.r F et de moyenne finie.

L'horizon temporel de la recherche est infini ; en conséquence, le nombre d'offres d'emploi que peut recueillir un travailleur et la durée de sa recherche ne sont pas limités. Les offres de salaire non acceptées immédiatement sont perdues ; le travailleur n'a pas de possibilité de "rappel" des offres.

L'activité de recherche en situation d'emploi est exclue. Les salaires proposés sont supposés constants une fois acceptés ; le travailleur n'accumule pas de capital humain général ou spécifique au sein de l'emploi.

Enfin le travailleur qui cherche un emploi est supposé neutre face au risque ; son objectif est de maximiser la valeur présente du revenu qu'il espère tirer de sa recherche. Son taux d'interêt instantané est égal à r ($r > 0$).

Sous cet ensemble d'hypothèses, la valeur présente anticipée d'un emploi acquis pour la période Δt assorti d'un salaire x est égale à :

$$(1) \quad L(x, \beta, \Delta t) = \frac{x\Delta t}{1+r\Delta t} + \frac{1-\beta\Delta t}{1+r\Delta t} L(x, \beta, \Delta t) + \frac{\beta\Delta t}{1+r\Delta t} V + o(\Delta t),$$

où $(1-\beta \Delta t + o(\Delta t))$ représente la probabilité de renouvellement du contrat de travail sur un intervalle de longueur Δt, $(\beta \Delta t + o(\Delta t))$ représente la probabilité de non-renouvellement de ce contrat sur le même intervalle, et V est la valeur présente anticipée d'une recherche en situation de chômage.

Après regroupement des termes semblables dans l'expression (1), et passage à la limite quand Δt tend vers zéro, il vient :

$$(2) \qquad L(x, \beta) = \frac{x+\beta V}{r+\beta},$$

La valeur présente anticipée d'une recherche en situation de chômage pendant la période Δt, notée V, s'écrit :

$$(3) \quad V = \frac{c\Delta t}{1+r\Delta t} + \frac{1-\lambda\Delta t}{1+r\Delta t} V + \frac{\lambda\Delta t}{1+r\Delta t} E_{(F)} \max\left[L(x,\beta), V\right] + o(\Delta t)$$

$$V = \frac{c\Delta t}{1+r\Delta t} + \frac{1-\lambda\Delta t}{1+r\Delta t} V$$

$$V = \frac{\lambda\Delta t}{1+r\Delta t} \int_0^{\infty} \max\left[L(x,\beta), V\right] dF(x) + o(\Delta t)$$

Le premier terme du côté droit de cette expression est le coût actualisé d'une recherche sur l'intervalle $(t, t+\Delta t)$.Le second terme est la probabilité de ne recevoir aucune offre d'emploi sur l'intervalle $(t, t+\Delta t)$ multipliée par la valeur actualisée de la poursuite de l'activité de recherche à la

fin de cet intervalle. Le troisième terme est la probabilité de recevoir une offre de salaire sur l'intervalle, multipliée par l'espérance mathématique du maximum des valeurs actualisées des deux options possibles à la fin de l'intervalle :

- soit accepter l'offre de salaire (option dont la valeur totale est définie par (2));
- soit poursuivre l'activité de recherche (option dont la valeur est V).

Le choix du travailleur fait apparaître un salaire de réserve, c'est à dire un niveau de salaire qui égalise les valeurs de ces deux options. Si l'on note W^* le salaire de réserve, sa valeur est donc telle que :

(4) $$L(W^*,\beta) = V.$$

Par substitution dans l'équation (1), il vient.

$$V = \frac{W^* \Delta t}{1 + r \Delta t} + \frac{V}{1 + r \Delta t} + o(\Delta t) \ ;$$

expression qui, après passage à la limite quand Δt tend vers zéro, implique :

(5) $$w^* = rV.$$

Il est possible d'obtenir l'équation de détermination du salaire de réserve w^* en remarquant tout d'abord que :

$$E_{(F)} \max[L(x,\beta), V] = V + \int_{w^*}^{\infty} \{L(x,\beta) - V\} dF(x).$$

A l'aide de (2) et (4), cette expression peut être ré-écrite :

$$E_{(F)} \max[L(x,\beta), V] = V + \frac{1}{r+\beta} \int_{w^*}^{\infty} (x - w^*) dF(x)$$

et être substitutée dans l'équation (3). Après manipulation de (3) et passage à la limite quand Δt tend vers zéro, on obtient finalement :

(6) $$c + w^* = \frac{\lambda}{r+\beta} \int_{w^*}^{\infty} \{x - w^*\}\, dF(x) + \frac{\lambda}{r+\beta} \int_{w^*}^{\infty} \{x - w^*\}\, dF(x).$$

L'équation (6) est l'équation de détermination du salaire de réserve w^*. La différentielle totale de l'expression (6) permet de mettre en évidence que w^* est une fonction décroissante de c, r, β, et une fonction croissante de λ et d'une translation positive de F(x).

Toute offre d'emploi assortie d'un salaire inférieur (respectivement, supérieur ou égal) à w^* sera rejetée (respectivement, acceptée). La possibilité de refuser (respectivement, accepter) une offre d'emploi est égale à $F(w^*)$.

Si l'on suppose que temps d'arrivée, type et salaire des offres d'emploi sont indépendants les uns des autres, la fonction de survie de la variable aléatoire "durée de la recherche", notée T_u, est définie par :

(7) $$G(t_u) = \text{prob}\{T_u \geq t_u\} = \exp\{(\lambda [1 - F(w^*)]\} t_u)$$

La fonction de densité de T_u s'écrit donc :

(8) $$g(t_u) = \lambda [F(w^*)] \exp(-\lambda [1 - F(w^*)] t_u)$$

alors que la fonction constante de risque pour T_u est définie par :

(9) $$h(t_u) = \lambda [F(w^*)].$$

Au total, le processus de transition entre l'état d'emploi (noté E) et l'état de chômage (noté U), généré par ce modèle élémentaire de recherche d'emploi, est un processus markovien homogène de matrice d'intensité de transition :

(10) $$Q = \begin{bmatrix} -q_{EU} & q_{EU} \\ q_{UE} & -q_{UE} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ \lambda [1 - F(w^*)] & -\lambda [1 - F(w^*)] \end{bmatrix}$$

Des estimations de modèles de recherche d'emploi sur données françaises sont contenues dans les papers de Fougère (1989) et Bonnal et Fougère (1991).

3.2 Le modèle de transition à utilité stochastique dynamique

Le modèle à utilité stochastique dynamique introduit par Burdett, Kiefer, Mortensen et Neuman (1984) et Olsen, Smith et Farkas (1986) est une généralisation du modèle de recherche d'emploi précédent, dans la mesura où il étudie le processus des mobilités individuelles entre au moins trois états : l'emploi, le chômage et l'inactivité. Il a été estimé sur données françaises par Magnac et Robin (1990), et Kamionka et Pastorello (1992).

L'idée centrale de ce modèle est représentée par l'hypothèse que le travailleur passe d'un état à l'autre en réponse à des chocs aléatoires sur les offres d'emploi et sur le coût d'opportunité du loisir.

Supposons que la position d'un inidividu sur le marché du travail puisse être décrite parfaitement par l'appartenance à l'un des trois états indiqués par E (l'emploi), U (le chômage) et I (l'inactivité). Chaque individu reçoit de son séjour dans l'état i l'utilité instantanée $u_i(\omega, \varepsilon)$, où ω représente la valeur courante du salaire, et ε constitue un indicateur de la valeur du loisir.

L'arrivée des chocs sur le système est représentée par l'arrivée simultanée de nouvelles valeurs de ω et de ε. Les temps de ces arrivées suivent des processus de Poisson indépendants, et donc les durées entre une arrivée et l'autre sont des variables aléatoires exponentielles de paramètre λ_i, i = E, U, I, indépendantes entre elles et des valeurs précédentes de ω et de ε. Les nouvelles valeurs de ω et de ε, quel que soit l'état occupé au moment du choc, représentent des réalisations indépendantes et identiquement distribuées d'une variable aléatoire de fonction de répartition notée $F(\omega,\varepsilon)$.

Au moment d'un choc, l'individu fait face à un problème de choix entre un nombre fini d'alternatives, dont la solution consiste à choisir l'état qui lui garantit l'utilité espérée actualisée la plus élevée.

En utilisant le principe de programmation dynamique de Bellman, il est possible de définir la valeur présente espérée de l'utilité associée à l'état de i :

$$(11)\quad V_i(\omega,\varepsilon) = E\left[\int_0^{t_i} u_i(\omega,\varepsilon)e^{-\rho s}\,ds + e^{-\rho t_i}\max_k V_k(w,\varepsilon)\right].$$

L'interprétation de cette formule est immédiate : pendant le séjour dans l'état i, de durée aléatoire t, l'individu reçoit un flux d'utilité constante $u_i(\omega,\varepsilon)$, escomptée à un taux ρ ; le deuxième élément représente l'utilité espérée actualisée qui résulte d'un choix optimal de l'individu au moment d'effectuer la transition. Les hypothèses formulées jusqu'à présent permettent d'expliciter ultérieurement $V_i(\omega,\varepsilon)$ en fonction des paramètres structuraux :

$$(12)\quad V_i(\omega,\varepsilon) = \frac{u_i(\omega,\varepsilon)}{\rho+\lambda_i} + \int \frac{\lambda_i}{\rho+\lambda_i} \max_k V_k(\varpi,\varepsilon)\, dF(\varpi,\varepsilon)$$

4. Problèmes d'observabilité partielle de Processus Ponctuels

4.1. Observabilité partielle des variables exogènes : hétérogénéité

. Si certaines variables explicatives ne sont pas observables, on peut, du moins formellement, les intégrer (par marginalisation) mais l'effet typique de l'hétérogénéité sera de "compliquer" les fonctions de hasard .

L'exemple le plus connu est celui du modèle "mover-stayer" : la fonction de hasard d'un individu tiré d'une population dont chaque membre à une distribution de durée exponentielle - donc constante en t, c'est-à-dire la plus simple possible - mais non constante entre individus- à cause, typiquement, de l'influence de variables exogènes - est strictement décroissante- c'est-à-dire plus complexe que chacune des distributions individuellles. Ceci est un exemple intéressant où la modélisation d'un agrégat est plus complexe que celle d'un individu alors qu'il arrive souvent que l'agrégation "lisse" les "aberrations individuelles".

On comprend dès lors l' intérêt manifesté pour les spécifications semi-paramétriques, en particulier de la fonction du hasard de base.

4.2. Observabilité partielle des variables endogènes

4.2.1. Données censurées

Lorsque un individu est observé durant un certain intervalle de temps, une information qu'il importe de ne pas négliger est qu'il se trouve dans son état initial (censure à gauche) et/ou final (censure à droite) depuis un certain temps même si sa durée totale de permanence dans ces états n'est typiquement pas connue exactement mais seulement sous forme d'inégalité.

Négliger une telle information introduit un biais, même si le phénomène qui cause cette censure, par exemple la date de début ou de fin d'enquête, est indépendent du problème économique étudié.

La modélisation des phénomènes de censure se fait souvent à l'aide des fonctions de hasard, vu que, par définition, elles expriment la probabilité de quitter un état conditionnellement au fait d'y être au moins depuis un certain temps.

4.2.2. Données en temps discret

Souvent, des données sont disponibles à des instants (discrets) irrégulièrement , et souvent aléatoirement, repartis sur l'axe des temps, c'est-à-dire (t_1, ..., t_k) et k : "aléatoires".

Sous une hypothèse markovienne, on peut certes modéliser ces observations comme un processus en temps discret mais la question est de savoir si le modèle discret est compatible avec un modèle structurel en temps continu. Ce problème d'"immersibilité" d'un modèle en temps discret dans un modèle en temps continu est connu, dans la littérature anglo-saxone, sous le nom de "embeddability".

Il s'agit essentiellment d'étudier les solutions en Q de l'équation :

$$P(t) = e^{Qt}$$

lorsque P(t) est estimé à partir des observations séparées dans le temps d'un intervalle de longueur t.

Ce problème est à double sens : il peut se faire qu' à un modèle estimé en temps discret ne corresponde aucun modèle en temps continu (non- immersibilité) ou, au contraire, correspondent plusieurs modèles en temps continu (problème d'"aliasing").

De nouveau, la modélisation de données en temps discret utilisera naturellement la modélisation du compensateur ou de son intensité stochastique, étant donné les relations suivantes :

$$N_{t\,i} - N_{t_{i-1}} = H_{t_i} - H_{t_{i-1}} + M_t - M_{t\,i-1}$$

$$\Delta N_{t\,i} = \int_{[t_i,\, t_{i-1})} h(t)\, dt + \varepsilon_{t\,i}$$

4.3. Quelques exemples de fichiers de données

Dans cette section, nous décrivons très succintement les principales sources de données individuelles françaises relatives au marché du travail. Nous attirons l'attention sur quelques problèmes d'observabilité partielle que peuvent soulever ces données. Il convient de remarquer que ces problèmes ne constituent pas des critiques au niveau de la collecte des données mais bien des difficultés dont il importe de tenir compte lors de la modélisation de ces données.

4.3.1. Enquête emploi

Enquête

annuelle

renouvelée par tiers

base aréolaire :typiquement : même individu et même logement pendant 3 ans *sauf si* l'individu a déménagé pendant ce laps de temps.

Données

situation de l'individu sur le marché de l'emploi

c'est-à-dire : $\{ X^i_{t_1} , X^i_{t_2} , X^i_{t_3} \}$

information sur l'histoire de l'individu : un peu *mais* peu fiable et très incomplète

par exemple : depuis combien de temps au chomage : oui *mais* pas le pourquoi

Aspect "observation incomplète"

critère de sélection :en partie endogène et en partie exogène

par exemple : déménagement pour prendre un emploi ailleurs

hétérogénéité

4.3.2. Fichiers ASSEDIC

Base de données

présence dans le fichier seulement si chomeur au moins une fois.

Données:

à chaque (re)-entrée dans le chomage : informations sur l'individu

c'est-à-dire : $\{ X^i_{t_1} , ... , X^i_{t_k} \}$avec $(t_1, ..., t_k)$ et k : "aléatoires"

Aspect "observation incomplète"

observation "endogénéisée" par le processus d'intérêt (critère de présence dans le fichier)

4.3.3. Enquête "suivi des chomeurs"

Enquête :

individus tirés aléatoirement dans le stock des chomeurs déclarés à l'ANPE en juillet 1986

± 7.000 sur 2.000.000

suivi en temps continu : 5 interviews tous les 6 mois (jusqu'en Mars 1988)

Données :

$\{ X_t^i : 0 \leq t \leq T \mid X_0^i = \text{chomeur} \}$

Aspect "observation incomplète"

censure à gauche et à droite

4.3.4. Enquête CEREQ (Centre d'Etude et de Recherche sur l'Emploi et la Qualification)

Enquête

sur filière et niveau d'étude donné de 1(Bac+5 et plus) à 6(primaire)

± exhaustive sur base des listes des établissements d'enseignement

enquête postale 9 mois après la réussite d'un inveau donné

Données

cheminement durant 9 mois

suivi sur 4 ans, avec rééchantillonnage

Aspect "observation incomplète"

attrition (pour cause d'enquête postale)

censure à droite (pour cause de suivi sur 4 ans)

Bibliographie

Bonnal, L., 1992, Microéconométrie de la durée de chomage et de la recherche d'emploi, Thèse de Doctorat en Sciences Economiques, Université des Sciences Sociales, Toulouse 1.

Bonnal, L. et D.Fougère, 1990, Les Déterminants individuels des Durées de Chomage, *Economie et Prévision*, n°5.

Bonnal, L. et D.Fougère, 1992, Estimating the structural effect of unemployment insurance on job-search costs, Cahier du GREMAQ, Université des Sciences Sociales, Toulouse 1.

Cazals, C., 1992 a, Transitions Emploi-Retraite : Etude Econométrique sur Données individuelles, Thèse de Doctorat en Sciences Economiques, Université des Sciences Sociales, Toulouse 1.

Cazals, C., 1992 b, Evolution des individus agés sur le marché du travail des Etats-Unis. Un modèle à risques concurrents, *Revue Economique,* **43**, 3 (à paraître).

Cox, D.R. et D.Oakes, 1984, *Analysis of Survival Data*, London : Chapman and Hall.

Daley, D.J. et D.Vere-Jones, 1988, *Introduction to Point Processes*, Berlin : Springer Verlag.

Droesbeke, J.-J., B.Fichet et P.Tassi (editeurs), 1989, *Analyse Statistique des Données de Survie,* Paris : Economica.

Florens, J.-P., 1990, Models and Inference for Duration Data : a Survey, in :J.-J.Laffont et al. (editeurs) ,*Microeconometrics : Surveys and Applications*, Oxford : Basil Blackwell.

Florens, J.-P. et D.Fougère, 1989, Non-causality in continuous time : application to counting processes, Cahier du GREMAQ, Université des Sciences Sociales, Toulouse 1 (version révisée : 1991).

Florens, J.-P. et D.Fougère, 1992, Point Processes, in : L.Matyas et P.Sevestre (editeurs), *Econometrics of Panel Data*, Kluwer Academic Press (à paraître)

Florens, J.-P., D.Fougère et P.Werquin, 1990, Durées de chomage et transitions sur le marché du travail, *Sociologie du Travail*, **4**.

Fougère, D., 1989, Recherche d'emploi en présence de contrats de travail de courte durée : modélisation et estimation sur données individuelles, *Annales d'Economie et de Statistique*, **14**.

Fougère, D. et T.Kamionka, 1991 a, Un Modèle Markovien du Marché du Travail, *Annales d'Economie et de Statistique* (a paraître)

Fougère, D. et T.Kamionka, 1991 b, Mobilité et Précarisation sur le Marché Français du Travail, *Economie et Prévision* (a paraître).

Fougère, D. et T.Kamionka, 1991 c, Bayesian Inference for the Mover-Stayer Model in Continuous Time, Cahier du GREMAQ, Université des Sciences Sociales, Toulouse 1

Fougère, D. et T.Kamionka, 1992, Econometric Analysis of Individual Labour Market Transitions, in : L.Matyas et P.Sevestre (éditeurs), *Econometrics of Panel Data*, Kluwer Academic Press (à paraître)

Fougère, D. et A.Sérandon, 1992, The Transition from School to Employment in France : the Role of Social and Educational Variables, Cahier du CEJEE, Université des Sciences Sociales, Toulouse 1

Heckman, J.J. et B. Singer, 1984, Econometric Duration Analysis, *Journal of Econometrics*, 24, 63-132.

Heckman, J.J. et B. Singer, 1985, editeurs, *Longitudinal Analysis of Labour Market Data*, Econometric Society Monographs, New-York : Cambridge University Press.

Kalbfeisch, F.D. et R.L.Prentice , 1980, *The Statistical Analysis of Failure Time Data* ,New York : Wiley.

Kamionka, T. et S.Pastorello, 1992,

Kaplan, E.L. et P.Meier, 1968, "Nonparametric estimation from incomplete observation", *Journal of the American Statistical Association* , **53**, 457-481.

Karr, A.F., 1986, *Point Processes and their Statistical Inference*, New York : Marcel Dekker.

Kiefer, N.M., 1988, Economic Duration Data and Hazard Functions, *Journal of the Economic Literature*, XXVI, 646-679.

Lancaster, T., 1990, *The Econometric Analysis of Transition Data*, New-York :Cambridge University Press.

Lawless, J.F., 1982, *Statistical Models for Lifetime Data*, New York, Wiley.

Tuma, N.B. et M.Hannan, 1980, *Social Dynamics : Models and Methods*, Orlando : Academic Press.